Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme

Lösungen von Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1:
Für eine Abbildung $f : X \to X$ heißt ein Punkt $x \in X$ **nicht-wandernd**, wenn es für jede offene Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^N(U) \cap U \neq \emptyset$. Andernfalls heißt x **wandernd**.

Finden Sie einen orientierungserhaltenden Kreishomöomorphismus f mit Rotationszahl $[\alpha]$:

a) für beliebiges $\alpha \in \mathbb{Q}$, so dass f keine wandernden Punkte besitzt.

Lösung:
R_α. Hier ist jeder Punkt periodisch und somit nicht-wandernd.

b) für beliebiges $\alpha \in \mathbb{Q}$, so dass alle Punkte bis auf endlich viele wandernd sind.

Lösung:
Jede Abbildung mit endlich vielen periodischen Punkten, z.B. $f(x) = \sin(\pi q x)$. Nach Aufgabe 4 von Blatt 1 sind alle Punkte asymptotisch zu einem periodischen, somit alle außer endlich vielen asymptotisch zu einem andern Punkt außer sich selbst. Wenn x asymptotisch zu $y \neq x$ ist, dann gilt für eine Umgebung U der Breite $d(x,y)/3$ von x, dass $f^n(U)$ für alle genügend großen n von U disjunkt ist.

c) für beliebiges $\alpha \notin \mathbb{Q}$, so dass f keine wandernden Punkte besitzt.

Lösung:
R_α. Hier hat jeder Punkt ein dichtes Orbit und ist somit nicht-wandernd.

d) für beliebiges $\alpha \notin \mathbb{Q}$, so dass die Menge der wandernden Punkte ein Intervall positiver Länge enthält.

Lösung:
Das Denjoy-Beispiel. Hier bilden die eingefügten speziellen Intervalle I_k Mengen mit der Eigenschaft $f(I_k) = I_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und somit sind alle darin befindlichen Punkte wandernd.

Aufgabe 2:
Sei $C = \{f : [0,1] \to [0,1],\ f \text{ monoton, stetig, } f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$ und d die C^0-Metrik (Maximumsmetrik) auf C. Sei $T : C \to C$ definiert durch

$$(Tf)(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} f(3x) & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2} & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{1}{2} f(3x-2) + \frac{1}{2} & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie: T ist eine Kontraktion auf (T, d) und hat somit einen eindeutigen Fixpunkt.

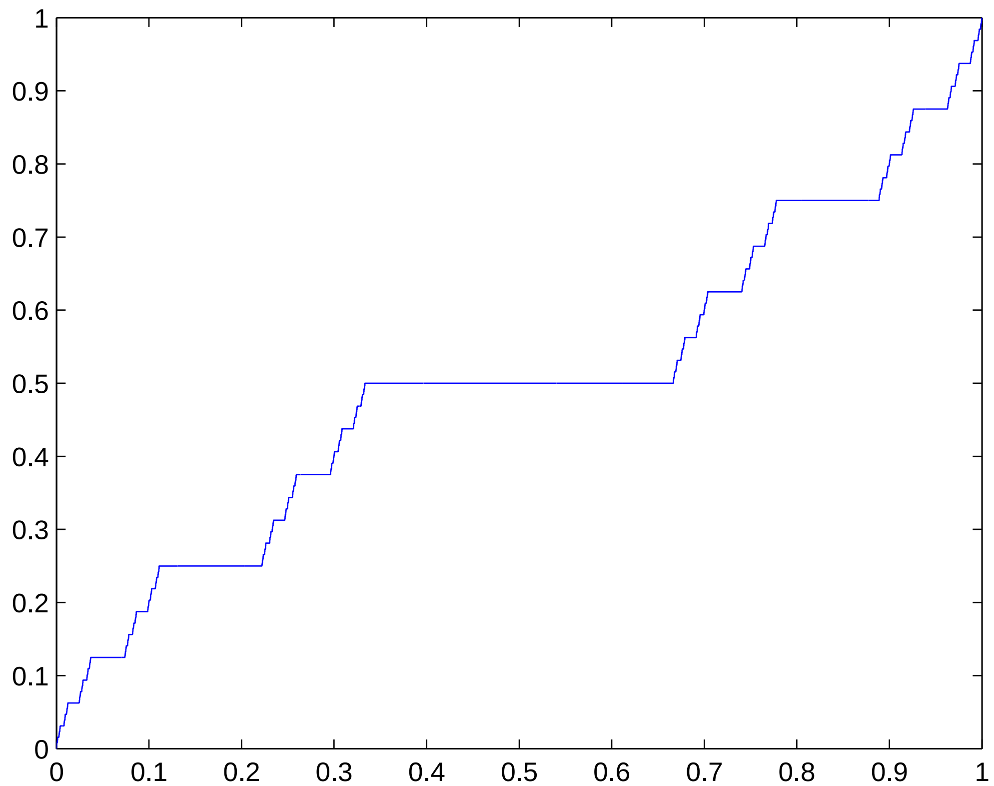
Lösung:

$$\begin{aligned} d(Tf, Tg) &= \max\left(\max_{x\in[0,1/3]} \left| \frac{1}{2}f(3x) - \frac{1}{2}g(3x) \right|, 0, \max_{x\in[2/3,1]} \left| \frac{1}{2}f(3x-2) - \frac{1}{2}g(3x-2) \right| \right) \\ &= \max_{x\in[0,1]} \left| \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}g(x) \right| \\ &= \frac{1}{2}d(f, g). \end{aligned}$$

Die Eindeutigket des Fixpunktes folgt wegen der Vollständigkeit von $C^0([0, 1])$ und der Abgeschlossenheit der Monotoniebedingung.

b) Skizzieren Sie den Graph des Fixpunktes.

Lösung:



Eine solche Funktion (monoton, stetig, stückweise konstant, aber nicht konstant) heißt **Teufelstreppe**.

Aufgabe 3:
Sei f die Abbildung im Denjoy-Beispiel. Beweisen Sie: Die ω-Limesmenge jedes Punktes von S^1 unter f ist nirgends dicht. h ist eine Teufelstreppe.

Lösung:
Die Vereinigung V der eingefügten speziellen Intervalle ist $f-$invariant, also gilt für alle $x \notin \bar{V}$: Das Orbit von x ist nicht dicht in V. Für $x \in V$ gilt dies auch, denn per Konstruktion schneidet das Orbit von $x \in V$ jedes eingefügte Intervall genau einmal, ist also nicht dicht darin. Somit ist f nicht transitiv. Nach der Poincare-Klassifikation gilt dann, dass die ω-Limesmenge eine nirgends dichte Cantor-Menge ist und die Konjugation eine Teufelstreppe ist.

Aufgabe 4:
Sei $f : S^1 \to S^1$ ein C^1-Diffeomorphismus mit beschränkter Variation von f' und nicht topologisch transitiv. Beweisen Sie: f hat ein periodisches Orbit.

Lösung:
Wenn die Variation von f' beschränkt ist und die Rotationszahl irrational, gilt nach dem Satz von Denjoy, dass f konjugiert ist zur Rotation. Diese ist topologisch transitiv, was sich unter Konjugation nicht ändert. Widerspruch. Also ist die Rotationszahl rational und somit gibt es ein periodisches Orbit.