Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme

Lösungen von Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1:
a) Sei f ein Diffeomorphismus mit einem Fixpunkt x. Zeigen Sie: $\{x\}$ ist eine hyperbolische Menge genau dann, wenn x hyperbolischer Fixpunkt ist. Finden Sie die Hyperbolizitätskonstanten C und λ, so dass für alle $v \in E^s$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|df^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|$$

und so dass für alle $v \in E^u$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|df^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|.$$

Lösung:
$\{x\}$ ist hyperbolische Menge genau dann, wenn $\{x\}$ invariant ist (also Fixpunkt) und für x gilt: $T_xM = E^s \oplus E^u$, und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $v \in E^s$:

$$\|df^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|$$

und analog für alle $n \in \mathbb{N}$, $v \in E^u$:

$$\|df^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|.$$

Dies gilt genau dann, wenn es keinen Eigenwert von Betrag 1 gibt. Also genau dann, wenn df_x hyperbolisch ist. □

b) Wann ist ein periodisches Orbit von einem Diffeomorphismus eine hyperbolische Menge? Finden Sie hinreichende und notwendige Bedingungen.

Lösung:
Ein periodisches Orbit

$$(x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}) = x_0)$$

ist eine periodische Menge genau dann, wenn $df^n_{x_i}$ hyperbolisch ist (d.h. keine Eigenwerte mit Betrag 1 hat) für ein i. Denn eine invariante Menge ist das periodische Orbit sowieso, und genau dann, wenn es keine Eigenwerte von Betrag 1 gibt, zerlegt sich $T_{x_i}M$ in invariante Unterräume E^s, E^u, so dass in der Operatornorm gilt:

$$\|df^n_{x_i}|_{E^s}\| < 1, \qquad \|df^{-n}_{x_i}|_{E^u}\| < 1.$$

Diese Bedingung ist übrigens unabhängig von i, denn $df^n_{x_i}$ und $df^n_{x_j}$ sind zueinander konjugiert mit der Konjugationsabbildung $df^{j-i}_{x_i}$, welche nicht von n abhängt.

Aufgabe 2:
Sei Λ eine hyperbolische Menge von $f : U \to M$, wobei M eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Für die zum (riemannschen) Skalarprodukt $\langle ., . \rangle$ gehörige Norm $\|.\|$ seien C und λ die Hyperbolizitätskonstanten. Sei $\langle ., . \rangle'$ ein anderes Skalarprodukt auf M

und $\|.\|'$ die zugehörige Norm. Zeigen Sie: Bezüglich $\langle .,. \rangle'$ ist Λ auch eine hyperbolische Menge, und zwar mit demselben λ.

Lösung:
Wegen Stetigkeit von $\|.\|$ und $\|.\|'$ (in beliebigen Koordinatenumgebungen) und positiver Definitheit des Skalarprodukts ist

$$\varphi(x) := \max\left(\max_{\|v\|=1} \|v\|', \max_{\|v\|'=1} \|v\|\right)$$

wohldefiniert, endlich, und stetig, also nimmt φ wegen Kompaktheit von M ein Maximum an und ist insbesondere beschränkt durch eine Konstante K.

(Bemerkung: Die naheliegende Argument "alle Normen im $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent" reicht noch nicht, denn für jeden Punkt $x \in M$ ergibt sich so eine von x abhängige Konstante, die a priori keinerlei Stetigkeit hat, also nicht beschränkt ist.)

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $v \in E^s$:

$$\|df^n v\|' \leq K\|df^n v\| \leq KC\lambda^n \|v\| \leq K^2 C\lambda^n \|v\|' =: C'\lambda^n \|v\|'$$

und analog für alle $n \in \mathbb{N}$, $v \in E^u$:

$$\|df^{-n} v\|' \leq K^2 C\lambda^n \|v\|'.$$

□

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: Wenn Λ_1 eine hyperbolische Menge für $f_1 : U_1 \to M_1$ ist und Λ_2 eine hyperbolische Menge für $f_2 : U_2 \to M_2$, dann ist $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ eine hyperbolische Menge für die Produktabbildung $f_1 \times f_2 : U_1 \times U_2 \to M_1 \times M_2$, definiert durch $(f_1 \times f_2)((x, y)) := (f_1(x), f_2(y))$.

Lösung:
Mittels

$$\|(v_1, v_2)\| := \sqrt{\|v_1\|_1^2 + \|v_2\|_2^2}$$

wird aus den Normen $\|.\|_1, \|.\|_2$ auf $T_{x_1}M_1$ und $T_{x_2}M_2$ eine auf dem Produktraum

$$T_{(x_1,x_2)}(M_1 \times M_2),$$

so dass bezüglich dieser Norm die Räume $T_{x_1}M_1$ und $T_{x_2}M_2$ senkrecht aufeinander stehen. Mittels $\lambda := \max(\lambda_1, \lambda_2)$ und $C := \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$, $v \in E^s := E_1^s \oplus E_2^s$:

$$\begin{aligned} \|df^n v\|^2 &= \|df^n v\|_1^2 + \|df^n v\|_2^2 \\ &\leq \left(C_1^2 + C_2^2\right) \lambda^{2n} \left(\|v\|_1^2 + \|v\|_2^2\right) \\ &= C^2 \lambda^{2n} \|v\|^2 \end{aligned}$$

und analog für alle $n \in \mathbb{N}$, $v \in E^u := E_1^u \oplus E_2^u$: $\|df^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|$. □

Aufgabe 4:
Zeigen Sie: Die Rotation R_α auf S^1 hat nicht die Beschattungseigenschaft. D.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein δ-Pseudo-Orbit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ existiert, so dass für jedes echte Orbit $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ gilt: Es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $d(x_n, y_n) > \varepsilon$.

Lösung:
Für $\beta \in (\alpha, \alpha + \delta)$ ist jedes Orbit von R_β ein δ-Pseudo-Orbit von R_α, aber nach

$$n = \left\lceil \frac{1}{2(\beta - \alpha)} \right\rceil$$

Schritten sind $R_\alpha^n(x)$ und $R_\beta^n(x)$ weit auseinander; z.B. für $\beta \in \{\alpha + 2/k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ist dieser Abstand $= 1/2$, also $> \delta$. $\square$