# Übungen zur Vorlesung

# Dynamische Systeme

# Lösungen von Aufgabenblatt 5

**Aufgabe 1:**
**a)** Zeigen Sie: Der 2-dimensionale Cantor-Staub $\Lambda = C \times C$ (mit der Standard-Cantormenge $C$) ist eine hyperbolische Menge für die G-förmige Hufeisen-Büroklammer $f : U \to M$, mit

$$f(x,y) = \begin{cases} (3x, y/3) & x \le 4/10 \\ (3x-2, y/3+2/3) & x \ge 6/10, \end{cases}$$

$U =$ offene $\varepsilon$-Umgebung von $[0,1] \times ([0,1/3] \cup [2/3,1])$, und $M = \mathbb{R}^2$.

**Lösung:**
An jeder Stelle $(x,y) \in U$ gilt

$$df = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin ist $\Lambda \subset U$ und $\Lambda$ ist $f$-invariant. Also gibt es für alle Punkte $p = (x,y)$ in $\Lambda$ eine Spaltung

$$T_p = E^s(p) \oplus E^u(p)$$

mit

$$E^s(p) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E^u(p) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese ist invariant wegen der Diagonalstruktur obiger Matrix. Also ist $\Lambda$ eine hyperbolische Menge. □

**b)** Ist $\Lambda$ lokal maximal? (Beweis oder Widerlegung)

**Lösung:**
Ja.

Zu zeigen: Es existiert eine offene Menge $V \subset U$ mit $\Lambda \subset V$, so dass

$$\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(\overline{V}).$$

Beweis: Dies gilt für *jede* offene $\varepsilon'$-Umgebung von $[0,1] \times ([0,1/3] \cup [2/3,1])$ mit $\varepsilon' \le \varepsilon$, denn für $q$ in dieser Menge und für $n \ge 0$ liegt $f^n(q)$ in $y$-Richtung höchstens $\varepsilon' 3^{-n}$ von $\Lambda$ entfernt und für für $n \le 0$ liegt $f^n(q)$ in $x$-Richtung höchstens $\varepsilon' 3^{-n}$ von $\Lambda$ entfernt. □

**Aufgabe 2:**
Zeigen Sie: Eine lokal maximale hyperbolische Menge $\Lambda$, welche minimal ist (jedes Orbit von $x \in \Lambda$ ist dicht in $\Lambda$), besteht aus genau einem periodischen Orbit.

**Lösung:**
Das Orbit von $x \in \Lambda$ ist dicht in $\Lambda$, also gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $i \in \mathbb{Z}$, so dass $f^i(x)$

Abstand $< \delta$ zu $x$ hat (denn das Orbit nähert sich auch jedem Punkt in der Umgebung von $x$ beliebig nahe an). Also gibt es ein periodisches $\delta$-Pseudoorbit.

Nach dem Beschattungssatz gibt es ein $y \in X$, welches $\varepsilon$-nahe an $x$ liegt und welches ein echtes periodisches Orbit ist. Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, indem wir obiges $\delta = \delta(\varepsilon)$ passend wählen.

Wegen der Periodizität dieses Orbits sind alle Punkte dieses Orbits beliebig nahe an $\Lambda$, nämlich $\varepsilon'$-nahe mit $\varepsilon' > 0$ beliebig. Somit gilt für jede offene Umgebung $V$ von $\Lambda$, dass so ein periodisches Orbit darin liegt. Wegen der $f$-Invarianz des Orbits liegt es auch in

$$\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(\overline{V}) = \Lambda.$$

Und es liegt beliebig nahe an $x$. Also enthält es $x$, denn das periodische Orbit hat sich selbst als Abschluss. Deswegen enthält das Orbit von $x$ nur endlich viele Punkte, und $\Lambda$ ist ein periodisches Orbit. $\square$

**Aufgabe 3:**
Zeigen Sie: Wenn $\Lambda$ eine lokal maximale hyperbolische Menge für $f$ ist und $f|_\Lambda$ die Spezifikationseigenschaft hat, dann ist $f|_\Lambda$ topologisch mischend.

**Lösung:**
Die Spezifikationseigenschaft besagt: Zu allen $\varepsilon > 0$ gibt es $L = L_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass es zu allen $L$-separierten Spezifikationen ein entsprechendes Orbit und auch ein entsprechendes periodisches Orbit gibt, welches die Spezifikation $\varepsilon$-beschattet.

Seien $U, V$ offen und nichtleer. Zu zeigen: Es gibt $N$, so dass für alle $n > N$ gilt, dass $V \cap f^n(U)$ nichtleer ist. Wähle $x \in U$, $y \in V$ und $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(x) \subset U$, $B_\varepsilon(y) \subset V$ ist. Wähle $N = L_\varepsilon$. Dann gilt für alle $n > N$ : Die Spezifikation

$$P : 0 \mapsto x,\ n \mapsto y$$

wird $\varepsilon$-beschattet von einem echten Orbitsegment mit Länge genau $n$. Also gibt es $x' \in B_\varepsilon(x)$, $y' \in B_\varepsilon(y)$ mit $f^n(x') = y'$. Somit ist $y \in V \cap f^n(U)$, was somit nichtleer ist. $\square$

**Aufgabe 4:**
Finden Sie einen Diffeomorphismus $f : U \to M$, so dass $\mathrm{NW}(f) \cap \Lambda \neq \mathrm{NW}(f|_\Lambda)$. Hierbei bezeichnet $\mathrm{NW}(f) := \{x \in U \,|\forall V \text{ offen}, x \in V\, \exists N \in \mathbb{N} :\ V \cap f^N(V) \neq \emptyset\}$ die Menge der nichtwandernden Punkte von $f$ und analog $\mathrm{NW}(f|_\Lambda)$ diejenigen der Einschränkung von $f$.

**Lösung:**
Konstruiere einen Diffeomorphismus auf dem 2-Torus mit einem heteroklinen Orbit, also mit $x \neq y$ und einem Orbit $(f^i(p))_{i \in \mathbb{Z}}$, für welches gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f^i(p) = y, \qquad \lim_{n \to -\infty} f^i(p) = x.$$

Konstruiere diesen so, dass das heterokline Orbit hyperbolisch ist, und zwar so, dass die instabilen Mannigfaltigkeiten jedes Punktes auf dem Orbit dem Orbit wieder nahe kommen. Dann ist jeder Punkt dieses Orbits nichtwandernd, also ein Element von $\mathrm{NW}(f) \cap \Lambda$. Andererseits hat $f|_\Lambda$ keine nichtwandernden Punkte außer $x, y$. Also ist $\mathrm{NW}(f) \cap \Lambda \neq \mathrm{NW}(f|_\Lambda)$. $\square$