Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1:
Für eine Abbildung $f : X \to X$ heißt ein Punkt $x \in X$ **nicht-wandernd**, wenn es für jede offene Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^N(U) \cap U \neq \emptyset$. Andernfalls heißt x **wandernd**.

Finden Sie einen orientierungserhaltenden Kreishomöomorphismus f mit Rotationszahl $[\alpha]$:

a) für beliebiges $\alpha \in \mathbb{Q}$, so dass f keine wandernden Punkte besitzt.

b) für beliebiges $\alpha \in \mathbb{Q}$, so dass alle Punkte bis auf endlich viele wandernd sind.

c) für beliebiges $\alpha \notin \mathbb{Q}$, so dass f keine wandernden Punkte besitzt.

d) für beliebiges $\alpha \notin \mathbb{Q}$, so dass die Menge der wandernden Punkte ein Intervall positiver Länge enthält.

Aufgabe 2:
Sei $C = \{f : [0,1] \to [0,1],\ f \text{ monoton, stetig, } f(0) = 0,\ f(1) = 1\}$ und d die C^0-Metrik (Maximumsmetrik) auf C. Sei $T : C \to C$ definiert durch

$$(Tf)(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}f(3x) & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \\ \frac{1}{2} & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{1}{2}f(3x-2) + \frac{1}{2} & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie: T ist eine Kontraktion auf (T, d) und hat somit einen eindeutigen Fixpunkt.

b) Skizzieren Sie den Graph des Fixpunktes.

Eine solche Funktion (monoton, stetig, stückweise konstant, aber nicht konstant) heißt **Teufelstreppe**.

Aufgabe 3:
Sei f die Abbildung im Denjoy-Beispiel. Beweisen Sie: Die ω-Limesmenge jedes Punktes von S^1 unter f ist nirgends dicht. f ist eine Teufelstreppe.

Aufgabe 4:
Sei $f : S^1 \to S^1$ ein C^1-Diffeomorphismus mit beschränkter Variation von f' und nicht topologisch transitiv. Beweisen Sie: f hat ein periodisches Orbit.

Abgabe: 15.11.2005 in der Vorlesung