Übungen zur Vorlesung

Dynamische Systeme

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1:

a) Sei f ein Diffeomorphismus mit einem Fixpunkt x. Zeigen Sie: $\{x\}$ ist eine hyperbolische Menge genau dann, wenn x hyperbolischer Fixpunkt ist. Finden Sie die Hyperbolizitätskonstanten C und λ, so dass für alle $v \in E^s$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|df^n v\| \leq C\lambda^n \|v\|$$

und so dass für alle $v \in E^u$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\|df^{-n} v\| \leq C\lambda^n \|v\|.$$

b) Wann ist ein periodisches Orbit von einem Diffeomorphismus eine hyperbolische Menge? Finden Sie hinreichende und notwendige Bedingungen.

Aufgabe 2:

Sei Λ eine hyperbolische Menge von $f : U \to M$, wobei M eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Für die zum (riemannschen) Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ gehörige Norm $\|.\|$ seien C und λ die Hyperbolizitätskonstanten. Sei $\langle .,. \rangle'$ ein anderes Skalarprodukt auf M und $\|.\|'$ die zugehörige Norm. Zeigen Sie: Bezüglich $\langle .,. \rangle'$ ist Λ auch eine hyperbolische Menge, und zwar mit demselben λ.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie: Wenn Λ_1 eine hyperbolische Menge für $f_1 : U_1 \to M_1$ ist und Λ_2 eine hyperbolische Menge für $f_2 : U_2 \to M_2$, dann ist $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ eine hyperbolische Menge für die Produktabbildung $f_1 \times f_2 : U_1 \times U_2 \to M_1 \times M_2$, definiert durch $(f_1 \times f_2)((x, y)) := (f_1(x), f_2(y))$.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie: Die Rotation R_α auf S^1 hat nicht die Beschattungseigenschaft. D.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein δ-Pseudo-Orbit $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ existiert, so dass für jedes echte Orbit $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gilt: Es gibt ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $d(x_n, y_n) > \varepsilon$.

Abgabe: 25.11.2005 in der Vorlesung