# Übungen zur Vorlesung

# Dynamische Systeme

# Aufgabenblatt 7

**Aufgabe 1:**
**a)** Finden Sie 2 verschiedene Billiards mit überabzählbar vielen periodischen Orbits der Periode 2.

**b)** Finden Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, ein Billiard mit überabzählbar vielen periodischen Orbits mit derselben Periode $n$.

**Aufgabe 2:**
Berechnen Sie die Ableitungsmatrix der Billiard-Abbildung

$$(s, \theta) \mapsto (s', \theta')$$

als Funktion der Parameter $s, s'$, der Winkel $\theta, \theta'$, der Erzeugendenfunktion $H = H(s, s')$ und der Krümmungen $\kappa, \kappa'$ des Randes an den Stellen $s, s'$ :

**a)** Beweisen Sie, dass

$$\frac{\partial s'}{\partial \theta} = \frac{H}{\sin \theta'}.$$

**b)** Beweisen Sie, dass

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \theta} = \frac{\kappa' H}{\sin \theta'} - 1.$$

**c)** Beweisen Sie, dass

$$\frac{\partial s'}{\partial s} = \frac{\kappa H - \sin \theta}{\sin \theta'}.$$

**d)** Beweisen Sie, dass

$$\frac{\partial \theta'}{\partial s} = \kappa' \frac{\kappa H - \sin \theta}{\sin \theta'} - \kappa.$$

**Aufgabe 3:**
Das *Stadion-Billiard* ist definiert durch zwei Halbkreise (von gleichem Radius), die mit zwei Strecken (gleicher Länge) zusammen eine konvexe $C^1$-Kurve bilden.

Zeigen Sie: Das Orbit, welches auf der langen Symmetrieachse liegt, ist hyperbolisch. Berechnen Sie dazu $df^2$ für dieses Orbit, wobei $f$ die Billiard-Abbildung ist, und zeigen Sie, dass dieses Orbit ein Sattel ist.

**Aufgabe 4:**
Finden Sie für jedes Billiard mit $C^1$-Rand und jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, eine Funktion mehrerer Variablen, so dass jeder kritische Punkt dieser Funktion einem periodischen Orbit der Periode $n$ des Billiards entspricht.

Abgabe: 27.1.2006 in der Vorlesung