Eigenschaften von Anosov-Diffeomorphismen

Ein Diffeomorphismus $f : M \to M$ heißt **Anosov-Diffeomorphismus**, wenn ganz M eine hyperbolische Menge für f ist.

Da unsere Definition von „hyperbolische Menge" unter anderem Kompaktheit fordert, setzen wir somit implizit voraus, dass M kompakt ist. Die Sprechweise „Sei $f : X \to X$ Anosov" impliziert also: X ist kompakte Mannigfaltigkeit. Ein Anosov-Diffeomorphismus ist auch auf der ganzen Mannigfaltigkeit definiert, während bei allgemeinen hyperbolischen Mengen ausgereicht hat, dass $f : U \to M$ auf einer offenen Menge $U \subset M$ definiert war.

THEOREM. ***Eigenschaften von Anosov-Diffeomorphismen:***

Wenn $f : M \to M$ ein Anosov-Diffeomorphismus ist, existieren $\lambda \in (0,1)$, $C_p < \infty$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ und für jedes $x \in M$ eine Spaltung von T_xM in Unterräume $E^s(x) \oplus E^u(x)$, so dass:

- *die Familien E^s und E^u sind f-invariant,*
- für alle $v \in E^s$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|df^n v\| \leq \lambda^n \|v\|$,
- für alle $v \in E^u$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|df^{-n} v\| \leq \lambda^n \|v\|$,
- $W^s(x) = \{y \in M : d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$ für $n \to \infty\}$ erfüllt $d^s(f(x), f(y)) \leq \lambda d^s(x,y)$ für alle $y \in W^s(x)$,
- $W^u(x) = \{y \in M : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \to 0$ für $n \to \infty\}$ erfüllt $d^u(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leq \lambda d^u(x,y)$ für alle $y \in W^u(x)$,
- die Familien W^s und W^u sind invariant,
- $E^s(x)$ ist tangential an $W^s(x)$,
- $E^u(x)$ ist tangential an $W^u(x)$,
- für $d(x,y) < \delta$ besteht der Durchschnitt $W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y)$ aus genau einem Punkt, genannt $[x,y]$,
- $[x,y]$ hängt stetig von x, y ab,
- $d^s([x,y], y) \leq C_p d(x,y)$ und $d^u(x, [x,y]) \leq C_p d(x,y)$.

Nun erforschen wir den Zusammenhang zwischen Dichtheit von periodischen Punkten, Dichtheit von (in-)stabilen Mannigfaltigkeiten und topologischem Mischungsverhalten bei Anosov-Diffeomorphismen.

Zur Vorbereitung etwas zur Dichtheit von periodischen Punkten:

THEOREM. *Sei $f : X \to X$ ein Anosov-Diffeomorphismus. Dann sind periodische Punkte dicht in der nichtwandernden Menge NW(f).*

BEWEIS. Für beliebiges $x \in$ NW(f) gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $f^N(B_\varepsilon(x)) \cap B_\varepsilon(x) \neq \emptyset$. Also gibt es ein y, das ε-nahe an x liegt, so dass $f^N(y)$ auch ε-nahe an x liegt. Somit ist das Orbit-Segment

$$y, f(y), f^2(y), \dots, f^N(y)$$

ein geschlossenes 2ε-Pseudoorbit. Nach dem Beschattungssatz gibt es in einer Umgebung von y einen periodischen Punkt. Dieser kann beliebig nahe an x gefunden werden, da ε beliebig klein gewählt werden kann. □

Bei diesem Beweis haben wir die Anosov-Eigenschaft, dass die hyperbolische Menge der gesamte Raum ist, nur dazu verwendet, um x beliebig wählen zu können. Wenn wir statt eines Anosov-Diffeomorphismus eine beliebige Abbildung mit hyperbolischer Menge Λ nehmen, stimmt das Argument für $x \in \Lambda$ immer noch; allerdings ist das periodische Orbit nun nicht mehr notwendigerweise in Λ, sondern nur in einer kleinen Umgebung. Aus dieser Überlegung heraus formulieren wir folgenden Satz:

THEOREM. *Wenn Λ eine lokal maximale hyperbolische Menge von einem Diffeomorphismus $f : U \to M$ ist, dann sind periodische Punkte von $f|_\Lambda$ dicht in der nichtwandernden Menge NW$(f|_\Lambda)$.*

Zur Erinnerung: Lokale Maximalität von $f : U \to M$ besagt, dass es eine offene Umgebung $V \subset U$ von Λ gibt, so dass Λ gleich dem Orbit vom Abschluss von V ist:

$$\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(\overline{V}).$$

Äquivalent dazu ist, dass es eine offene Umgebung U' von Λ gibt, so dass für jede offene Umgebung $V \subset U'$ von Λ gilt, dass Λ gleich dem Orbit vom Abschluss von V ist, d.h. $\Lambda = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(\overline{V})$.

Diese Bedingung heißt deswegen „lokal maximal", weil sie impliziert, dass man lokal, also in einer kleinen Umgebung U von Λ, keine Punkte zu Λ dazutun kann (also Λ vergrößern), so dass Λ immer noch invariant ist.

BEWEIS. Ähnlich wie vorhin: Für $x \in \mathrm{NW}(f|_\Lambda)$ und alle $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $f^N((B_\varepsilon(x) \cap \Lambda)) \cap (B_\varepsilon(x) \cap \Lambda) \neq \emptyset$. Also gibt es ein y, das ε-nahe an x liegt, so dass $f^N(y)$ auch ε-nahe an x liegt. Wieder ist das Orbit-Segment $y, f(y), f^2(y), \dots, f^N(y)$ ein geschlossenes 2ε-Pseudoorbit in X. Nach dem Beschattungssatz gibt es in einer Umgebung von y in X einen periodischen Punkt p beliebig nahe an x.

Damit wissen wir schon, dass die periodischen Punkte von f dicht sind in Λ; wir wissen aber noch nicht, ob auch die periodischen Punkte von $f|_\Lambda$ schon dicht sind in Λ. Es bleibt also noch zu zeigen, dass p auch in Λ liegt. Dazu benutzen wir die lokale Maximalität: p liegt schon beliebig nahe an Λ. Damit gilt das auch für die ersten n Iterierten von p (wegen Stetigkeit von f). Wegen Periodizität gilt das für das ganze Orbit von p. Also liegt das Orbit von p in einer Menge V in einer beliebig kleinen Umgebung von Λ. Somit liegt es in $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \overline{V}$. Diese Menge ist aber gleich Λ. □

THEOREM. *Sei $f : X \to X$ ein Anosov-Diffeomorphismus. Dann sind äquivalent:*

(1) *NW$(f) = X$.*
(2) *Für alle $x \in X$ ist $W^u(x)$ dicht in X.*
(3) *Für alle $x \in X$ ist $W^s(x)$ dicht in X.*
(4) *f ist topologisch transitiv.*
(5) *f ist topologisch mischend.*

Während des Beweises werden noch ein paar Lemmata auftauchen (und bewiesen).

BEWEIS. Zuerst zeigen wir $(1) \Rightarrow (3)$:

Wähle in X eine $\varepsilon/4$-dichte endliche Menge von periodischen Punkten

$$x_1, \dots, x_k.$$

Für

$$N := \prod_{i=1}^{k} \text{Periode}(x_i)$$

sind alle x_i periodisch mit (derselben) Periode N. Wir definieren $g := f^N$. Statt f können wir auch g untersuchen, denn die stabile Mannigfaltigkeit von f durch x ist genau die stabile Mannigfaltigkeit von g durch x; genauso für die instabilen Mannigfaltigkeiten.

LEMMA. *Es gibt ein $q \in \mathbb{N}$, so dass wenn $d(x_i, x_j) < \varepsilon/2$ und wenn für ein $y \in M$ gilt, dass $d(x_i, W^u(y)) < \varepsilon/2$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $d\left(x_j, g^{nq}\left(W^u(y)\right)\right) < \varepsilon/2$.*

BEWEIS. Wähle z in $W^u(y) \cap W^s_\varepsilon(x_i)$. Dann gilt $d(g^T(z), x_i) < \varepsilon/2$ für ein $T \in \mathbb{N}$ (und auch für alle $T > T_1$, mit $T_1 \in \mathbb{N}$ unabhängig von z). Da gilt, dass $d(g^T(z), x_j) < \varepsilon$, existiert ein $w \in W^u(g^T(z)) \cap W^s_\varepsilon(x_j)$. Also ist $d(g^{T'}(w), x_j) < \varepsilon/2$ für ein $T \in \mathbb{N}$ (und auch für alle $T' > T_2$ mit $T_2 \in \mathbb{N}$ unabhängig von w. Mit $q := T_1 + T_2$ folgt die Behauptung. □

Damit können wir die Implikation $(1) \Rightarrow (2)$ zeigen: Da die Menge$\{x_1, \dots, x_k\}$ endlich ist, können wir in endlich vielen ε-Sprüngen von jedem x_i zu jedem x_j gelangen. Bezeichnen wir mit K die maximal nötige Zahl. Dann ist wegen vorigem Lemma die

Menge $g^{Kq}(W^u(y))$ eine ε-dichte Menge, denn die Abschätzung $d\left(x_j, g^{nq}\left(W^u(y)\right)\right) < \varepsilon/2$ gilt auch für $j = i$, also $d\left(x_i, g^{nq}\left(W^u(y)\right)\right) < \varepsilon/2$.

Wenn wir f mit f^{-1}vertauschen (was auch Anosov ist), vertauschen sich die Rollen von W^u, W^s. Also haben wir auch $(1) \Rightarrow (3)$ bewiesen.

Jetzt noch eine Vorbereitung für den Beweis von $(2) \Rightarrow (5)$:

LEMMA. *Wenn für alle $y \in X$ gilt, dass $W^u(y)$ dicht ist in X, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R(\varepsilon) < \infty$ so dass für alle $x \in X$ gilt: $W^u_{R(\varepsilon)}(x)$ ist ε-dicht in X.*

BEWEIS. Wir wissen schon, dass für jedes $x \in X$ die Menge $W^u(x)$ in X dicht ist, also ε-dicht für jedes $\varepsilon > 0$. Da

$$W^u(x) = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} W^u_r(x),$$

muss also für jedes $\varepsilon > 0$ ein $r(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $W^u_{r(\varepsilon,x)}(x)$ schon ε-dicht ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass r unabhängig von x gewählt werden kann.

Seien x und ε schon gewählt. Die instabilen Mannigfaltigkeiten $(W^u(y))_{y \in X}$ bilden eine „Blätterung" W^u, die stetig ist, in dem Sinn, dass festes r und für x' beliebig nahe bei x die Menge $W^u_r(x)$ auch beliebig nahe an der Menge $W^u_r(x')$ ist. D.h., es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle x' mit $d(x, x') < \delta$ die Menge $W^u_{r(\varepsilon/2,x)}(x')$ in X ε-dicht ist.

Wir finden nun zu jedem $x \in X$ so eine $\delta(x)$-Umgebung. Alle zusammen bilden sie eine Überdeckung von X, also gibt es wegen Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung. Wir können also das Maximum der $r(\varepsilon/2, \tilde{x}_i)$ über die Mittelpunkte $\tilde{x}_i$ dieser endlich vielen Bälle nehmen und es $R(\varepsilon)$ nennen. Dann ist $W^u_{R(\varepsilon)}(x)$ für alle x eine ε-dichte Menge. $\square$

Nun zeigen wir $(2) \Rightarrow (5)$:

Zu zeigen ist: Für alle U, V offen in X (und nichtleer) gibt es $\bar{n}$, so dass für alle $n \geq \bar{n}$ gilt, dass $U \cap f^n(V) \neq \emptyset$. Da V offen ist, enthält es $W^u_\varepsilon(x)$ für ein $x \in X$ und ein $\varepsilon > 0$. Außerdem enthält U einen ε'-Ball (oBdA $\varepsilon' = \varepsilon$). Wir wissen schon, dass Abstände auf W^u sich unter Anwendung von f exponentiell vergrößern. Also gibt es $\bar{n} \in \mathbb{N}$, so dass $f^{\bar{n}}(W^u_\varepsilon(x)) \supset W^u_{R(\varepsilon)}(f^{\bar{n}}(x))$. Die Menge auf der rechten Seite ist ε-dicht, schneidet also U.

Genauso folgt $(3) \Rightarrow (5)$, denn wenn alle $W^s(x)$ für f dicht sind, sind alle $W^u(x)$ für f^{-1} dicht, also gibt es für alle U, V offen und nichtleer ein $\bar{n} \in N$, so dass für alle $n \geq \bar{n}$ gilt $U \cap \left(f^{-1}\right)^n (V) \neq \emptyset$, also $V \cap f^n(U) \neq \emptyset$.

Die Implikation $(5) \Rightarrow (4)$ folgt direkt aus der Definition von topologischem Mischen und topologischer Transitivität.

Die Folgerung $(4) \Rightarrow (1)$ ist ebenfalls einfach, denn wenn f ein dichtes Orbit hat und x ein Punkt darauf, dann gilt für alle $y \in X$ und jede offene Umgebung U von y, dass es $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $m > n$ gibt mit $f^n(x) \in U$, $f^m(x) \in B_{d(y,f^n(x))/2}(y) \subset U$, und somit auch $f^{N:=m-n}(U) \cap U \neq \emptyset$. $\square$