Volumenerhaltung von Billiards

Im Folgenden betrachten wir ein Orbitstück, so dass der Punkt (s, θ) unter der Billiard-Abbildung f abgebildet wird auf (s', θ'). Das hat zur Auswirkung, dass s' jetzt eine von (s, θ) abhängige Variable ist.

Wenn wir die Koordinaten θ umschreiben mittels

$$r := -\cos\theta$$

und analog

$$r' := -\cos\theta',$$

dann vereinfachen sich die Gleichungen der Erzeugendenfunktion:

$$\frac{\partial}{\partial s'} H(s, s') = r',$$
$$\frac{\partial}{\partial s} H(s, s') = -r.$$

Wenn dann wie vorhin (s', θ') das Bild unter f von (s, θ) ist, dann können wir die erste Gleichung auch schreiben als

$$\frac{\partial}{\partial s'} H(s, s') = R = R(s, r).$$

In diesen Koordinaten können wir ein wichtiges Faktum über die Billiard-Abbildung zeigen:

THEOREM. *Die Billiard-Abbildung f ist volumenerhaltend in den Koordinaten (s, r). Präziser formuliert: Die Abbildung*

$$g : (s, r) \mapsto (S, R) = (S(s, r), R(s, r)),$$

die gegeben ist durch die Konjugation

$$g = h \circ f \circ h^{-1}$$

von f mit der Abbildung

$$h : \{(s, \theta) \in [0, L) \times (0, \pi)\} \to \{(s, r) \in [0, L) \times (-1, 1)\},$$

$$h((s, \theta)) := (s, -\cos\theta)$$

ist eine volumenerhaltende Abbildung (bezüglich des Standard-Volumens, d.h. Flächeninhalt, in $\mathbb{R}^2$. Die Abbildung ist außerdem auch orientierungserhaltend.

BEWEIS. Definiere

$$\tilde{H}(s, r) := H(s, S(s, r)).$$

Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{H}(s,r)}{\partial s} &= -r + R(s,r)\frac{\partial S(s,r)}{\partial s}\\
\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \tilde{H}(s,r)}{\partial s}\right) &= -1 + R(s,r)\frac{\partial^2 S(s,r)}{\partial r \partial s} + \left(\frac{\partial R(s,r)}{\partial r}\right)\frac{\partial S(s,r)}{\partial s}\\
\frac{\partial \tilde{H}(s,r)}{\partial r} &= R(s,r)\frac{\partial S(s,r)}{\partial r}\\
\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial \tilde{H}(s,r)}{\partial r}\right) &= \left(\frac{\partial R(s,r)}{\partial s}\right)\frac{\partial S(s,r)}{\partial r} + R(s,r)\frac{\partial^2 S(s,r)}{\partial s \partial r}.
\end{aligned}
$$

Gleichsetzen von

$$R(s,r)\frac{\partial^2 S(s,r)}{\partial s \partial r} = R(s,r)\frac{\partial^2 S(s,r)}{\partial r \partial s}$$

liefert

$$\left(\frac{\partial R(s,r)}{\partial r}\right)\frac{\partial S(s,r)}{\partial s} - \left(\frac{\partial R(s,r)}{\partial s}\right)\frac{\partial S(s,r)}{\partial r} = 1,$$

mit anderen Worten, die Jacobi-Determinante von g ist

$$\det \frac{\partial g(s,r)}{\partial (s,r)} = \det \frac{\partial (S(s,r), R(s,r))}{\partial (s,r)} = +1.$$

□

REMARK. Die Abbildung h ist ein Diffeomorphismus auf seinem (offenen) Definitionsbereich, allerdings ist die Ableitung nach oben unbeschränkt für $\theta \to 0$ oder $\theta \to \pi$. Deswegen läßt sich h nicht auf $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$ differenzierbar fortsetzen.

Außerdem sehen f und g nahe dieses Randes $\theta = 0, \theta = \pi$ verschieden aus: Die Abbildung g ist eine Twistabbildung, welche die Menge $\{(0,\theta) \mid \theta \in (0,\pi)\}$ in eine Kurve abbildet, welche bei $\theta = 0$ und $\theta = \pi$ eine senkrechte Tangente hat. Dagegen hat das Bild von $\{(0,\theta) \mid \theta \in (0,\pi)\}$ unter f endliche Steigung (welche gegeben ist durch die Krümmung von ∂G bei $s = 0$).