Kreisabbildungen

Im Folgenden sehen wir uns eine ganz spezielle Klasse von dynamischen Systemen an: Abbildungen auf dem Kreis. Diese sind einfach genug, so dass wir sie noch recht leicht analysieren können, haben aber andererseits schon viele interessante Eigenschaften, die zu untersuchen sich lohnt.

Zur Erinnerung: diskrete dynamische Systeme sind vom Typ

$$f : X \to X,$$

wobei X typischerweise ein metrischer (oder zumindest topologischer) Raum ist, oft mit „glatter Struktur" (d.h. wir können differenizeren), und f ist typischerweise mindestens stetig, oft glatt und umkehrbar, d.h. Diffeomorphismus.

Für Kreisabbildungen untersuchen wir Abbildungen $f : X \to X$ auf

$$X = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

d.h. $[0, 1)$ mit Addition modulo 1, dem sogenannten „Einheitskreis" S^1.

REMARK. Genausogut könnten wir Abbildungen $g : Y \to Y$ studieren auf dem Raum $Y = \{z \in \mathbb{C} : |c| = 1\}$, der verwirrenderweise ebenfalls „Einheitskreis" heißt, diesen Namen eigentlich eher verdient, und in anderen Büchern ebenfalls mit dem Symbol S^1 bezeichnet wird. Ob wir auf X oder Y arbeiten, macht keinen Unterschied, denn die Abbildung $h : X \to Y$, $h(x) = \exp(2\pi i x)$ konjugiert jedes solche $g : Y \to Y$ mit einem $f = h \circ g \circ h^{-1} : X \to X$. Wir verwenden stets X und nicht Y; somit kann die Gruppenoperation additiv geschrieben werden (statt multiplikativ) und der Kreis hat Periode 1 (statt Periode 2π).

Sei also $f : S^1 \to S^1$ ein Homöomorphismus (d.h. umkehrbar mit f und f^{-1} stetig) und orientierungserhaltend.

DEFINITION. Eine stetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ein **Lift** von f, wenn gilt:

$$f \circ \pi = \pi \circ F,$$

wobei $\pi : \mathbb{R} \to S^1$, $\pi(x) = [x]$ die Projektion von $x \in \mathbb{R}$ auf seine Äquivalenzklasse $[x]$ in S^1 ist. Das heißt, folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow F \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^1 & \longrightarrow f \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

Beispiele:

(1) $f = \mathrm{id}$, $F = \mathrm{id}$,

(2) $f = \mathrm{id}$, $F = \mathrm{id} + k$, $k \in \mathbb{Z}$,
(3) $f = \mathrm{id} + \alpha$ (mod 1), $F = \mathrm{id} + \alpha + k$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

LEMMA. *Für jeden Homöomorphismus f auf S^1 ist der Lift F von f eindeutig bestimmt bis auf Addition von konstanten Funktionen $k \in \mathbb{Z}$.*

BEWEIS. Für konkretes $[x] \in S^1$ ist klar, dass $F(x)$ eindeutig bestimmt ist bis auf Addition von $k \in \mathbb{Z}$, denn dies trifft für x zu und wegen der Kommutativität von obigem Diagramm ist $[F(x)]$ gleich $f([x])$, also ist $F(x)$ eindeutig bestimmt bis auf Addition von $k \in \mathbb{Z}$.

Wir wählen nun $x \in \mathbb{R}$ fest. Wegen der Forderung, dass der Lift stetig sein muss, gibt es nur eine Fortsetzung von $F(x)$ zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Funktion. $\square$

REMARK. Wegen Homöomorphie von f gilt dass $F(x+1) = F(x)+1$ für alle $x \in R$ gilt oder $F(x+1) = F(x) - 1$ für alle $x \in R$ gilt. Da f orientierungserhaltend ist, scheidet der zweite Fall aus. Daraus folgt sofort:

$$F(x+k) = F(x) + k \qquad \text{für alle } x \in R \text{ und alle } k \in \mathbb{Z}.$$

LEMMA. *Wenn für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass*

$$|x - y| \leq k \in \mathbb{Z},$$

dann gilt auch

$$|F(x) - F(y)| \leq k.$$

BEWEIS. Wegen Bijektivität von f gilt die Behauptung für $k = 1$: Der Graph von F kann auf jedem Intervall der Länge 1 nur um 1 wachsen, d.h. das Bild des Intervalls $(x, x+1)$ unter F ist enthalten im Intervall $(F(x), F(x)+1)$. Jetzt nutzen wir die Gleichung

$$F(x+m) = F(x) + m \quad (\text{für } x \in R,\ m \in \mathbb{Z})$$

aus: Aus

$$|x - y| \leq k \in \mathbb{Z}$$

folgt

$$|x - m - y| \leq 1$$

für geeignetes $m \in \mathbb{Z}$, und zwar $m \in (0, k-1)$ für $x > y$ und $m \in (-(k-1), 0)$ für $x < y$. Weil $x' = x - m$ die Abschätzung $|x' - y| \leq 1$ erfüllt, gilt

$$|F(x-m) - F(y)| = |F(x') - F(y)| \leq 1$$

und deshalb

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= |F(x') - F(y) + m| \\ &\leq 1 + |m| \\ &= k. \end{aligned}$$

$\square$

Durch wiederholte Anwendung erhalten wir:

COROLLARY. *Wenn für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass*

$$|x - y| \leq k \in \mathbb{Z},$$

dann gilt auch für alle $n \in \mathbb{N}$, dass

$$|F^n(x) - F^n(y)| \leq k.$$

Rotationszahlen von Kreis-Homöomorphismen

DEFINITION. Sei $f : S^1 \to S^1$ ein orientierungserhaltender Kreishomöomorphismus. Die **Rotationszahl** von f ist definiert durch

$$\rho(f) := \limsup_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \qquad (\text{mod } 1)$$

für einen (beliebigen) Lift F von f und für ein (beliebiges) $x \in S^1$.

Dieser Wert $\rho(f)$ hängt nicht von der Wahl von F ab, da sich verschiedene Lifts von f nur um Konstanten unterscheiden, und hängt auch nicht von x ab wegen vorigem Korollar.

Die Rotationszahl $\rho(f)$ misst die „durchschnittliche Verschiebung" von x auf dem Kreis, wenn f darauf oft angewendet wird. Wobei diese „Zahl" in Wirklichkeit ein Element von S^1 ist.

Aus der Definition folgt sofort:

REMARK. $\rho(f^n) = n\rho(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir werden jetzt sehen, dass f genau dann periodische Orbits hat, wenn die Rotationszahl Äquivalenzklasse von rationalen Zahlen ist.

DEFINITION. Wir nennen $s \in S^1$ **rational**, wenn $s = [t]$ mit $t \in \mathbb{Q}$ ist, ansonsten **irrational**.

THEOREM. *Wenn ein orientierungserhaltender Kreishomöomorphismus f ein periodisches Orbit hat, dann ist die Rotationszahl $\rho(f)$ rational.*

Genauer gilt: Wenn es $q \in \mathbb{Z}$ und $x \in S^1$ gibt mit $f^q(x) = x$, dann ist $\rho(f) \in \left(\frac{1}{q}\mathbb{Z}\right)/\mathbb{Z}$, das heißt

$$\rho(f) = \left[\frac{m}{q}\right] \quad \textit{mit } m \in \mathbb{Z}.$$

BEWEIS. Setze für x dieses periodische Orbit ein: $f^q(x) = x$, also $F^q(x) = x + k$, $k \in \mathbb{Z}$. Es folgt also

$$F^{l\cdot q}(x) = x + l \cdot k \quad \text{für alle } l \in \mathbb{Z}.$$

Somit gilt

$$\frac{F^{lq}(x)-x}{lq} = \frac{lk}{lq} = \frac{k}{q}.$$

Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ ist $m = ql + r$ mit $r \in \{0, \ldots, q-1\}$. Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{F^m(x)-x}{m} &= \frac{F^{lq+r}(x)-x}{lq+r} \\ &= \frac{F^r(x+lk)-x}{lq+r} \\ &= \frac{F^r(x)+lk-x}{lq+r} \\ &\xrightarrow{l\to\infty} \frac{k}{q} \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Die Umkehrung gilt auch:

THEOREM. *Wenn ein orientierungserhaltender Kreishomöomorphismus f keine periodischen Orbits hat, dann ist seine Rotationszahl $\rho(f)$ irrational. D.h., wenn die Rotationszahl rational ist, dann hat f ein periodisches Orbit.*

BEWEIS. Wir nehmen also Rationalität der Rotationszahl an und folgern, dass es ein periodisches Orbit gibt. Wenn

$$\rho(f) = \left[\frac{p}{q}\right],$$

dann gilt

$$\rho(f^q) = q\rho(f) = [0].$$

Definiere

$$g := f^q.$$

Ein periodisches Orbit von f mit Periode q ist ein Fixpunkt von g. Wir wissen also, dass g Rotationzahl Null hat, und suchen einen Fixpunkt von g. Sei G ein Lift von g mit $G(0) \in [0,1)$. Wegen der Bedingung $G(0) \in [0,1)$ ist ein Fixpunkt von g auch ein Fixpunkt von G.

Annahme: g hat keinen Fixpunkt. Dann gilt endweder

$$G(x) - x > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

oder

$$G(x) - x < 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Letztere Möglichkeit scheidet aus wegen der Bedingung $G(0) \in [0,1)$.

Da $x \mapsto G(x) - x$ eine periodische stetige Funktion ist, wird das Minimum angenommen und ist positiv (wegen $G(x) - x > 0$). Ebenso wird das Maximum angenommen und ist < 1. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in R$ gilt:

$$G(x) - x \in (\varepsilon, 1 - \varepsilon).$$

Deswegen gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{G^n(x) - x}{n} &\in (\varepsilon, 1-\varepsilon) \\ &\neq 0 \pmod 1. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass g die Rotationszahl Null hat. □

Um die Notation zu vereinfachen, unterscheiden wir hierbei nach Möglichkeit nicht mehr zwischen x und $[x]$ und schreiben für $[x]$ entweder „x (mod 1)" oder einfach x. Dabei müssen wir nur aufpassen, dass ein solches x nur bis auf Addition von ganzen Zahlen bestimmt ist; z.B. dürfen wir nicht aus $x_n > y_n + \frac{1}{2}$ versehentlich schließen, dass $\lim_n x_n \neq \lim_n y_n$ sei, denn es kann ja $\lim_n x_n = \lim_n y_n + 1$ sein, und natürlich ist $\lim_n y_n + 1 = \lim_n y_n$ (mod 1).

Verhalten der Rotationszahl bei Konjugation

Wir wollen natürlich möglichst viele Abbildungen auf S^1 untersuchen. Welche konkreten Beispiele verstehen wir gut genug, um die Rotationszahl leicht berechnen zu können? Bis jetzt eigentlich recht wenige, denn die direkte Verwendung der Definition ist nur in wenigen Fällen leicht. Leicht ist es zum Beispiel bei der **Rotation** $R_\alpha : S^1 \to S^1$,

$$R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod 1$$

(bzw. $R_\alpha([x]) = [x + \alpha]$). Hier sehen wir sofort, dass $\rho(R_\alpha) = \alpha$ ist. Was wir brauchen, ist ein Mechanismus, um größere Klassen von Abbildungen auf einmal zu untersuchen. Hier ist einer: Wir untersuchen die Veränderung (oder deren Ausbleiben) der Rotationszahl bei Konjugation. Zur Erinnerung:

DEFINITION. Für zwei diskrete dynamische Systeme $f : X \to X$ und $g : Z \to Z$ auf topologischen Räumen X, Z heißen f und g zueinander **konjugiert**, wenn gilt

$$g = h^{-1} \circ f \circ h$$

mit einem Homöomorphismus $h : X \to Z$.

THEOREM. ***(„Konjugation ändert die Rotationszahl nicht.")*** *Sei f wie bisher ein orientierungserhaltender Kreishomöomorphismus, h ebenfalls. Dann gilt:*

$$\rho(h^{-1} \circ f \circ h) = \rho(h).$$

Mit anderen Worten, wenn $f : S^1 \to S^1$ und $g : S^1 \to S^1$ zueinander konjugiert sind, dann haben f und g dieselbe Rotationszahl.

BEWEIS. Sei F ein Lift von f und sei H ein Lift von h. Dann gilt $\pi \circ H = h \circ \pi$ und damit

$$\begin{aligned} \pi \circ H^{-1} &= h^{-1} \circ h \circ \pi \circ H^{-1} \\ &= h^{-1} \circ \pi \circ H \circ H^{-1} \\ &= h^{-1} \circ \pi, \end{aligned}$$

also ist H^{-1} ein Lift von h^{-1}.

Außerdem ist $H^{-1} \circ F \circ H$ ein Lift von $h^{-1} \circ f \circ h$, denn

$$\begin{aligned} \pi \circ H^{-1} \circ F \circ H &= h^{-1} \circ \pi \circ F \circ H \\ &= h^{-1} \circ f \circ \pi \circ H \\ &= h^{-1} \circ f \circ h \circ \pi. \end{aligned}$$

Wir müssen nun zeigen, dass der Term

$$\left|\left(H^{-1} \circ F \circ H\right)^n - F^n\right|$$

„nicht allzu groß" ist, denn dies ist die Differenz der Terme, die in die Berechnung der Rotationszahl von $h^{-1} \circ f \circ h$ und der von f eingehen. Dazu wählen wir zuerst den Lift H von h so, dass $H(0) \in [0, 1)$ ist. Damit schätzen wir ab, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$|H(x) - x| \leq 2.$$

Somit gilt auch

$$|F^n(H(x)) - F^n(x)| \leq 2.$$

Dadurch sehen wir, dass

$$\begin{aligned} \left|(H^{-1} \circ F \circ H)^n(x) - F^n(x)\right| &= \left|H^{-1}(F^n(H(x))) - F^n(x)\right| \\ &\leq 4. \end{aligned}$$

Folgerung:

$$\begin{aligned} \rho(h^{-1} \circ f \circ h) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{(H^{-1} \circ F \circ H)^n(x) - x}{n} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \\ &= \rho(f). \end{aligned}$$

Dieses Argument funktioniert mit beliebigem x, obwohl ein einziges x für die Rotationszahl schon genug wäre. $\square$

Rotationszahl als Limes

Nachdem wir schon wissen, dass $\rho(f)$ weder von x noch von der Wahl des Lifts F von f abhängt, zeigen wir nun, dass der $\limsup$ auch nicht von der Folge $n \to \infty$ abhängt, also der Limes existiert. Dies rechtfertigt auch die Bezeichnung „Rotations-*Zahl*" (im Gegensatz zu „Rotations-*Menge*" oder „Rotations-*Intervall*").

THEOREM. *Die Rotationszahl von f ist gleich*

$$\rho(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(x) - x}{n} \quad \textit{(mod 1)}$$

für einen beliebigen Lift F von f und einen beliebigen Punkt $x \in \mathbb{R}$. D.h., der Limes existiert immer.

BEWEIS. Für rationales $\rho(f)$ haben wir dies bereits bewiesen, denn wir haben gezeigt, dass in diesem Fall existiert ein periodisches Orbit $[x]$ von f existiert, also ist

$$F^n(x) = x + k \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}.$$

Genau wie im Beweis der Existenz eines periodischen Orbits von f gilt wieder

$$F^m(x) = F^{lq+r}(x) = F^r(x + lk) = F^r(x) + lk$$

und wieder gilt

$$\begin{aligned}\frac{F^m(x) - x}{m} &= \frac{F^{lq+r}(x) - x}{lq + r} \\ &= \frac{F^r(x) + lk - x}{lq + r} \\ &\overset{l\to\infty}{\longrightarrow} \frac{k}{q}.\end{aligned}$$

Also existiert hier der Limes.

Bleibt noch der Fall, dass die Rotationszahl irrational ist, also keine periodischen Orbits existieren. Sei $k_n \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$F^n(x) - x \in [k_n, k_n + 1]$$

für ein $x \in \mathbb{R}$ gilt. OBdA gilt dies auch für alle $x \in R$ gleichzeitig, denn $F^n - \mathrm{id}$ ist eine periodische Funktion, die jedes Intervall der Länge 1 in ein Intervall von Länge höchstens 1 abbildet. Dann gilt:

$$\left| \frac{F^n(0) - 0}{n} - \frac{k_n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Also gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned}
F^{mn}(0) - 0 &= \left(F^n(F^{n(m-1)}(0)) - F^{n(m-1)}(0)\right) \\
&\quad + \left(F^{n(m-1)}(0) - F^{n(m-2)}(0)\right) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \left(F^{n\cdot 1}(0) - F^{n\cdot 0}(0)\right) \\
&\in [mk_n, m(k_n+1)].
\end{aligned}$$

Also ist

$$\left|\frac{F^{nm}(0) - 0}{mn} - \frac{k_n}{n}\right| \leq \frac{1}{n}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F^m(0) - 0}{m} - \frac{F^n(0) - 0}{n}\right| &\leq \left|\frac{F^m(0) - 0}{m} - \frac{k_m}{m}\right| \\
&\quad + \left|\frac{k_m}{m} - \frac{F^{mm}(0) - 0}{mn}\right| \\
&\quad + \left|\frac{F^{mn}(0) - 0}{mn} - \frac{k_n}{n}\right| \\
&\quad + \left|\frac{k_n}{n} - \frac{F^n(0) - 0}{n}\right| \\
&\leq 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).
\end{aligned}$$

Dies ist eine Cauchy-Folge, also konvergent. □