Markov-Partitionen

Die Idee hinter Markov-Partitionen ist es, ein dynamisches System auf einer Mannigfaltigkeit (also einem Raum mit überabzählbar vielen Punkten) zu reduzieren auf einen Shift auf endlich vielen Symbolen, d.h. den Raum in eine endliche Zahl Stücke zu zerlegen, die schon genügen, um die Dynamik zu verstehen. Eine **Markov-Partition** von Λ ist eine endliche „Partition" von Λ durch Mengen $R_1, \ldots, R_N$, die sich nur am Rand überlappen und die die Markov-Eigenschaft haben, dass die Abbildung f bestimmte Ränder von R_i wieder auf Ränder abbildet.

Zunächst etwas Wiederholung elementarer Topologie: Für eine Menge $A \subset M$ heißt eine Menge $B \subset M$ **offen relativ zu** A, wenn es eine in M offene Menge O gibt mit $B = A \cap O$. Notation: Das Innere einer Menge B relativ zu A bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Inn}_A(B),$$

den Rand mit

$$\partial_A B.$$

Erinnerung: Es gibt ein $\eta < \infty$, so dass gilt: Für alle $x, y \in \Lambda$ schneiden sich $W^u_\eta(x)$ und $W^s_\eta(y)$ höchstens in einem Punkt. Wenn auch noch $d(x, y) < \delta$ gilt, dann schneiden sie sich in genau einem Punkt, welcher dann mit

$$[x, y]$$

bezeichnet wird.

DEFINITION. Sei $f : U \to M$ ein Diffeomorphismus mit lokal maximaler hyperbolischer Menge Λ. Eine Menge $R \subset \Lambda$ heißt ein **Rechteck**, wenn R Durchmesser $< \eta/10$ hat und für alle $x, y \in R$ gilt, dass

$$[x, y] \in R.$$

Wir benutzen die Notation

$$W^s_R(x) := R \cap W^s_\eta(x)$$

und analog für $W^u_R(x)$.

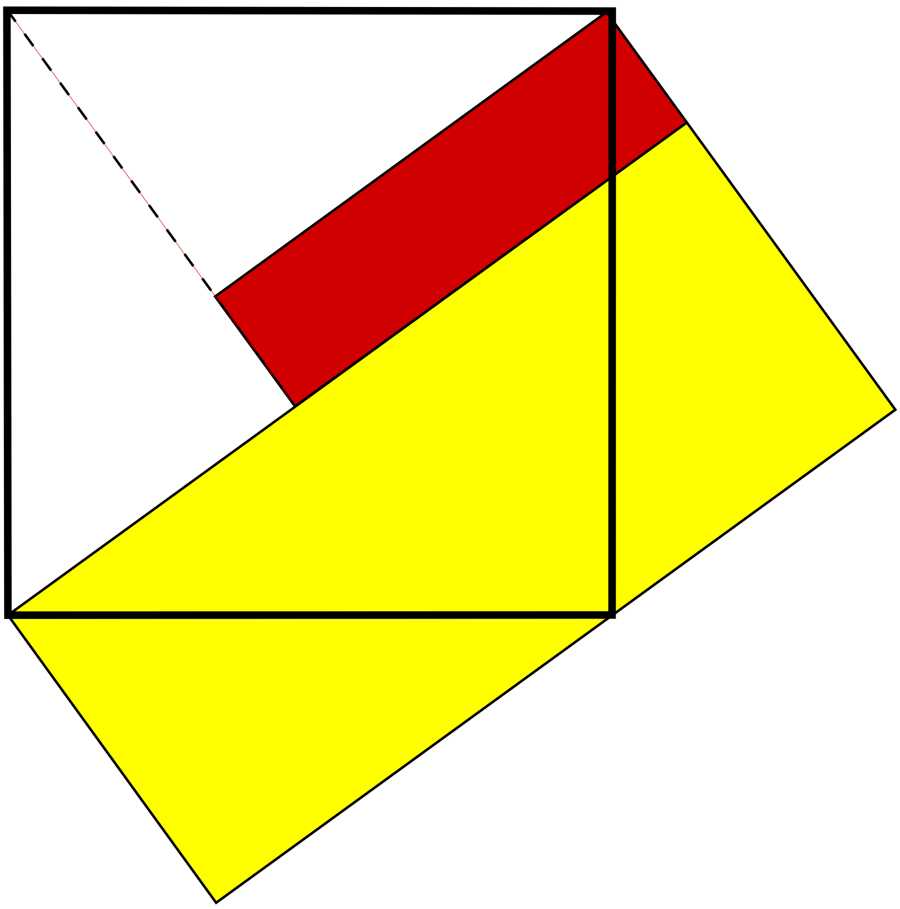
Eine **Markov-Partition** von Λ ist eine endliche „Partition" von Λ durch Mengen $R_1, \ldots, R_N$, welche:

- Abschluss Ihres Inneren bezüglich Λ sind, d.h. $R_i = \overline{\mathrm{Inn}_\Lambda(R_i)}$,
- Rechtecke sind, d.h. abgeschlossen unter $[.,.]$,
- die Bedingung $\mathrm{Inn}_\Lambda(R_i) \cap \mathrm{Inn}_\Lambda(R_{j\neq i}) = \emptyset$ erfüllen,
- die Eigenschaft haben, dass wenn $x \in \mathrm{Inn}(R_i)$ und $f(x) \in \mathrm{Inn}(R_j)$, dann gilt

(1)
$$W^u_{R_j}(f(x)) \subset f(W^u_R(x)),$$
(2)
$$f(W^s_{R_i}(x)) \subset W^s_{R_j}(f(x)).$$

REMARK. Die Bedingung $\mathrm{Inn}_\Lambda(R_i) \cap \mathrm{Inn}_\Lambda(R_{j\neq i}) = \emptyset$ ist schwächer als das, was bei der Definition einer *Partition* normalerweise gefordert wird, nämlich Disjunktheit der Elemente der Partition. Wir benutzen diese schwächere Forderung, damit wir für alle R_i abgeschlossene (somit kompakte) Mengen zulassen können.

EXAMPLE. Sei f der Anosov-Automorphismus auf dem 2-Torus, gegeben durch Multiplikation mit $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Wir wissen schon, dass f Eigenwerte $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ hat und orthogonale Eigenvektoren. Im folgenden Diagramm ist eine Partition von T^2 in 2 Rechtecke eingezeichnet:



REMARK. Für die Vorstellung ist es sehr nützlich, sich Markov-Partitionen als solche Rechtecke wie in vorigem Beispiel vorzustellen. Dies ist allerdings nur ein vereinfachtes Bild. In Wirklichkeit ist es schon bei sehr einfachen Abbildungen, z.B. Automorphismen auf dem 3-Torus – d.h. dasselbe wie oben mit einer 3×3-Matrix statt einer 2×2-Matrix – so, dass die Elemente einer Markov-Partition keine glatten Quader mehr sind, sondern fraktale Mengen.

Man kann zeigen:

Auf einer kompakten lokal maximalen hyperbolischen Menge gibt es Markov-Partitionen von beliebig kleinem Durchmesser.

Damit sind wir nun in der Lage, zu verstehen, wozu Markov-Partitionen wirklich nützlich sind: Wie der folgende Satz sagt, läßt sich die Dynamik von f beschreiben durch einen Shift auf einem Symbolraum. Zunächst definieren wir den Symbolraum:

DEFINITION. Für eine quadratische $N \times N$ Matrix A mit Einträgen 0 oder 1 ist der **bezüglich A zugelassene Folgenraum** gegeben durch

$$\Omega_A := \{\omega \in \Omega_N,\ \forall n \in \mathbb{Z} : \omega_n = i, \omega_{n+1} = j \text{ nur wenn } a_{ij} = 1\}.$$

Hierbei ist

$$\Omega_N = \{\omega = (\dots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \dots) \,|\, \forall n \in \mathbb{Z} :\ \omega_n \in \{0, \dots, N-1\}\}.$$

THEOREM. *Wenn f eine lokal maximale hyperbolische Menge Λ hat und $\mathcal{R} = (R_1, \dots, R_N)$ eine Markov-Partition von genügend kleinem Durchmesser ist, dann ist die Abbildung*

$$\varphi : \Omega_A \to \Lambda,$$

wobei A definiert ist durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } f(R_i) \cap R_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die definiert ist durch

$$\varphi(\omega) := \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^{-n}(R_{\omega_n})$$

wohldefiniert, stetig, surjektiv und erfüllt

$$f \circ \varphi = \varphi \circ \sigma,$$

Außerdem gilt: φ ist injektiv auf $\varphi^{-1}(\Lambda \setminus \Lambda')$, wobei $\Lambda' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\partial_\Lambda \mathcal{R})$.

BEWEIS.

(1) Wohldefiniertheit von φ: Jedes R_i ist eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge Λ. Wegen Definition von A ist für alle $n \in \mathbb{N}$ der Durchschnitt

$$f(R_{\omega_n}) \cap R_{\omega_{n+1}}$$

nichtleer. Also ist

$$\left(\bigcap_{|n|\leq k} f^{-n}\left(R_{\omega_n}\right)\right)_{k\in N}$$

eine monoton fallende Folge von nichtleeren Mengen (d.h. jede Menge ist nichtleere Teilmenge der vorigen). Deswegen ist der Durchschnitt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}\left(R_{\omega_n}\right)$$

eine nichtleere geschlossene Menge. Wegen Expansivität von f kann diese Menge nicht mehr als einen Punkt enthalten, denn wenn $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}\left(R_{\omega_n}\right)$ und Durchmesser($\mathcal{R}$)<ε, dann ist $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und Expansivität von f bedeutet, dass $d(f^n(x), f^n(y)) < \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nur möglich ist für $x = y$. Deswegen benötigen wir auch eine *kleine* Markov-Partition, um hier $\varepsilon < \delta$ wählen zu können.

(2) Injektivität der Einschränkung von φ : Die Einschränkung von φ garantiert, dass $f^n(x)$ $\not$für kein $n \in \mathbb{N}$ auf dem Rand der Partition liegt. Da sich die Elemente der Partition nur am Rand schneiden können, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau ein $i \in \{1, \ldots, N\}$ mit $f^n(x) \in R_i$. Deswegen besteht $\varphi^{-1}(x)$ aus genau dem einen $\omega \in \Omega_A$, für welches für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\omega_n = i$ ist, wobei $f^n(x) \in R_i$.

(3) Stetigkeit von φ : Für $\omega, \omega' \in \Omega_A$ ist $d(\omega, \omega')$ klein nur dann, wenn ω_n, ω'_n auf $\{n \in \mathbb{Z} \,|\, |n| < k\}$ übereinstimmen mit k gross. Wir haben vorhin schon gesehen, dass

$$\left(\bigcap_{|n|\leq k} f^{-n}\left(R_{\omega_n}\right)\right)_{k\in N}$$

für $k \to \infty$ gegen einen Punkt konvergiert, also für k gross genug einen beliebig kleinen Durchmesser hat. Da $\varphi(\omega), \varphi(\omega')$ beide darin liegen, ist ihr Abstand auch beliebig klein für $d(\omega, \omega')$ klein genug.

(4) φ erfüllt $f \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$: Dies folgt direkt aus der Konstruktion:

$$\begin{aligned}
f(\varphi(\omega)) &= f\left(\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}\left(R_{\omega_n}\right)\right) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n+1}\left(R_{\omega_n}\right) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}\left(R_{\omega_{n+1}}\right) \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n}\left(R_{\sigma(\omega)_n}\right) \\
&= \varphi(\sigma(\omega)).
\end{aligned}$$

$\square$