Maß-theoretisches Mischen

Bislang kennen wir topologisches Mischen, topologische Transitivität (d.h. Dichtheit von einem Orbit) und Minimalität (d.h. Dichtheit von jedem Orbit). All dies sind *topologische* Eigenschaften, hängen also nur von der Struktur der offenen Mengen ab. Wenn wir (wie meist) auf einem metrischen Raum sind, dann hängen diese Eigenschaften von der Distanzfunktion ab.

Wenn wir nun ein System untersuchen wollen, das auf einem *Maß*raum definiert ist, dann stehen diese Begriffe nicht zur Verfügung, denn zwischen Maß und Topologie besteht erst einmal keine Verbindung; wir haben nur das Maß, um die Komplexität der Transformation zu bemessen.

Wir kennen schon Ergodizität (eine schwache Bedingung). Jetzt wenden wir uns dem Mischen zu, diesmal dem maß-theoretischen.

Was stellen wir uns also unter „Mischen" vor? So etwas wie beim Anrühren von Farbe im Eimer: Wenn wir z.B. in einen 10-Liter Eimer 9 Liter gelbe und 1 Liter rote Farbe hineinschütten, dann nennen wir das ganze gut gemischt, wenn beliebige Teilmengen des Eimervolumens die Eigenschaft haben, dass darin 90% gelbe und 10% rote Farbteilchen sind. Dies führt zu folgender Definition:

DEFINITION. Sei T eine Transformation eines Raums mit Maß μ und sei μ invariant unter T. Das System (T, μ) heißt **(maß-theoretisch) mischend**, wenn für alle messbaren Mengen A, B gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^n B) = \mu(A)\mu(B) .$$

Der Zusatz „maß-theoretisch" bei Mischen wird oft nicht ausgeschrieben. Wie bei Ergodizität ist auch dies nicht eine Eigenschaft von T oder μ allein, sondern vom 2-Tupel (T, μ) .

Mischen impliziert Ergodizität:

LEMMA. *Wenn das System (T, μ) mischend ist, dann ist (T, μ) ergodisch.*

BEWEIS. Wenn (T, μ) mischend ist und $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^n B) = \mu(A)\mu(B) > 0.$$

Nehmen wir an, (T, μ) sei nicht ergodisch. Dann gibt es solche disjunkte A, B, beide T-invariant, so dass $A \cup B = X$ gilt. Dann wäre

$$\mu(A \cap T^n B) = \mu(A \cap B) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Widerspruch. □

Manchmal können wir Topologie und Maßtheorie aber doch in Verbindung bringen. Zum Beispiel dann, wenn das Maß auf allen offenen nichtleeren Mengen positiv ist. So etwas ist zum Beispiel der Fall, wenn das System auf einem euklidischen Raum (endliche Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ oder n-Torus) definiert ist. Maß-theoretisches Mischen impliziert dann topologisches Mischen:

LEMMA. *Wenn μ ein Maß auf einem topologischen Raum ist, für welches alle nichtleeren offenen Mengen messbar sind und positives Maß haben, und wenn (T,μ) maß-theoretisch mischend ist, dann ist (T,μ) auch topologisch mischend.*

BEWEIS. Wenn (T,μ) mischend ist und $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$, dann gilt wieder

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \cap T^n B) = \mu(A)\mu(B) > 0,$$

also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n > N$ gilt

$$\mu(A \cap T^n B) > 0,$$

also ist $A \cap T^n B$ nichtleer. □

Als nächstes lernen wir ein Maß auf Symbolfolgen kennen. Dies ist ein Beispiel für ein mischendes System.

DEFINITION. Auf dem Raum

$$\Omega_N = \{(\ldots,\omega_{-1},\omega_0,\omega_1,\ldots) \mid \forall i \in \mathbb{N} : \omega_i \in \{0,\ldots,N-1\}\}$$

der (zweiseitigen) Symbolfolgen im Raum mit N Symbolen ist das **Bernoulli-Maß** wie folgt definiert: Sei

$$p = (p_0,\ldots,p_{N-1}) \in [0,1)^N$$

ein Wahrscheinlichkeitsvektor, d.h. $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Für einen Zylinder

$$Z_{i_1,\ldots,i_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} := \{\omega \in \Omega \mid \forall j \in \{1,\ldots,k\} : \omega_{i_j} = \alpha_j\}$$

definieren wir

$$\mu_p\left(Z_{i_1,\ldots,i_k}^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}\right) := \prod_{j=1}^k p_j.$$

Damit haben wir ein Maß auf der durch Zylinder erzeugten σ-Algebra. Dies ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, denn der ganze Raum Ω_N ist gleich dem Zylinder mit 0 Einträgen, hat also Maß $\prod_{j\in\emptyset} p_j = 1$.

THEOREM. *Das Bernoulli-Maß ist mischend bezüglich dem Shift σ auf Ω_N.*

BEWEIS. Für zwei Zylinder

$$A = Z_{i_1,\dots,i_k}^{\alpha_1,\dots,\alpha_k}, \quad B = Z_{i'_1,\dots,i'_l}^{\beta_1,\dots,\beta_l}$$

gilt, dass es $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $n > N$ die Zylinder A und $\sigma^n B$ keine gemeinsames Indices haben, also immer $i_j \neq i'_{j'}$ ist. Das gilt nämlich für

$$N = \max\left\{i'_{j'} \mid j' \in \{1,\dots,l\}\right\} - \min\left\{i_j \mid j \in \{1,\dots,k\}\right\}.$$

Also gilt für solche n, dass

$$A \cap \sigma^n B = Z_{i_1,\dots,i_k,i'_1-n,\dots,i'_l-n}^{\alpha_1,\dots,\alpha_k,\beta_1,\dots,\beta_l}$$

und daraus folgt sofort

$$\mu\left(A \cap \sigma^n B\right) = \mu(A)\mu(B).$$

Trivialerweise konvergiert also die linke Seite gegen $\mu(A)\mu(B)$. $\square$