Ordnungserhaltung von Kreisabbildungen

Sei f wie bisher ein orientierungserhaltender Kreishomöomorphismus. Wir wissen schon: Wenn die Rotationszahl $\rho(f)$ irrational ist, dann gibt es kein periodisches Orbit. Also ist jedes Orbit $(f^i(x))_{i\in\mathbb{Z}}$ von der Art, dass jedes $f^i(x)$ zwischen anderen Punkten des Orbits liegt.

Der Kreis ist (im Gegensatz zu $\mathbb{R}$) keine total geordnete Menge. Dennoch können wir von einer **Ordnung** von Punkten auf dem Kreis sprechen: 3 Punkte a, b, c auf dem Kreis können nämlich entweder in dieser Reihenfolge a, b, c oder in der Reihenfolge a, c, b liegen; im letzteren Fall hätten sie nicht dieselbe Ordnung auf dem Kreis. Entsprechend gilt der Begriff der Ordnung auch für mehr als 3 Punkte, besonders für unendlich viele:

DEFINITION. Wenn $f, g : S^1 \to S^1$ Kreisabbildungen sind, dann sagen wir, das Orbit von $x \in S^1$ unter f habe **dieselbe Ordnung** wie das Orbit von $y \in S^1$ unter g, wenn für alle $i, j, k \in \mathbb{Z}$ gilt: Die Ordnung der 3 Punkte

$$f^i(x), f^j(x), f^k(x)$$

(in dieser Reihenfolge) auf dem Kreis ist gleich der Ordnung von

$$g^i(y), g^j(y), g^k(y)$$

(in dieser Reihenfolge).

THEOREM. *Wenn ein orientierungserhaltender Kreishomöomorphismus f irrationale Rotationszahl $\rho(f)$ hat, dann ist die Ordnung von jedem Orbit von f gleich der Ordnung eines Orbits der Rotation $R_{\rho(f)}$.*

Hierbei ist die Rotation R_α gegeben durch $R_\alpha(x) := x + \alpha \pmod 1$. Für das im Satz erwähnte Orbit der Rotation R_α ist es egal, von welchem Startwert aus es beginnt, denn alle Orbits von R_α sind gleich bis auf Verschiebung.

Für den Beweis brauchen wir noch folgendes Lemma:

LEMMA. *Sei $\rho(f)$ irrational und F wie bisher ein Lift von f. Dann gilt:*

(1) *Wenn für irgendein $x \in R$, $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ gilt, dass*

$$F^{n_1}(x) + m_1 < F^{n_2}(x) + m_2$$

ist, dann gilt auch für alle anderen $y \in \mathbb{R}$, dass

$$F^{n_1}(y) + m_1 < F^{n_2}(y) + m_2.$$

(2) *Die Abbildung $H : \Omega \to \Lambda$ mit*

$$\Omega := \{m + n\rho \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}, \qquad \rho = \rho(f),$$

$$\Lambda := \{F^n(0) + m \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\},$$

die definiert ist durch

$$H(m+n\rho) := F^n(0)+m,$$

erhält die Ordnung auf $\mathbb{R}$. *(*H *ist wohldefiniert wegen der Irrationalität von* ρ.*)*

BEWEIS. Zu (1): Wenn dies nicht gilt, dann gibt es $y \in \mathbb{R}$ mit $F^{n_1}(y)+m_1 \geq F^{n_2}(y)+m_2$, und wegen dem Zwischenwertsatz gibt es dann auch ein $y \in \mathbb{R}$ mit

$$F^{n_1}(y)+m_1 = F^{n_2}(y)+m_2.$$

Also ist $F^{n_1}(y) = F^{n_2}(y)+k,\ k \in \mathbb{Z}$. Damit hat $f^{n_1-n_2}$ einen Fixpunkt, und damit wäre $\rho(f)$ rational. Widerspruch zur Annahme.

Zu (2): H ist bijektiv, weil aus $F^{n_1}(0) = F^{n_2}(0)+m_2-m_1$ wieder folgt, dass 0 ein Fixpunkt von $f^{n_1-n_2}$ ist. Also ist H invertierbar. Es genügt zu zeigen: Die Umkehrfunktion H^{-1} ist monoton steigend.

Sei also $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ gegeben mit

$$F^{n_1}(0)+m_1 < F^{n_2}(0)+m_2.$$

Zu zeigen ist nun, dass $m_1+n_1\rho < m_2+n_2\rho$ gilt.

Zunächst nehmen wir an, dass $n_1 > n_2$. Es gilt:

$$F^{n_1-n_2}(F^{n_2}(0)) - F^{n_2}(0) < m_2-m_1.$$

Wegen (1) gilt diese Aussage auch, wenn wir $x := F^{n_2}(0)$ ersetzen durch $y = 0$, d.h.

$$F^{n_1-n_2}(0) - 0 < m_2-m_1.$$

Hier können wir wieder (1) anwenden und 0 ersetzen durch $F^{n_1-n_2}(0)$. Dann erhalten wir

$$F^{2(n_1-n_2)}(0) - F^{n_1-n_2}0 < m_2-m_1.$$

Addition der letzten 2 Gleichungen gibt

$$F^{2(n_1-n_2)}(0) - 0 < 2\left(m_2-m_1\right).$$

Per Induktion können wir genauso zeigen:

$$F^{k(n_1-n_2)}(0) - 0 < k\left(m_2-m_1\right) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
\rho(f) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(0)-0}{n} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{F^{k(n_1-n_2)}(0)-0}{k\left(n_1-n_2\right)} \\
&\leq \frac{m_2-m_1}{n_1-n_2}
\end{aligned}$$

und weil die linke Seite irrational ist, gilt strikte Ungleichung. Daraus folgt

$$\rho\left(n_1 - n_2\right) < m_2 - m_1,$$

also

$$m_1 + n_1\rho < m_2 + n_2\rho$$

wie gewünscht.

Wenn andererseits $n_1 < n_2$ gilt, dann folgt aus

$$F^{n_1}(0) + m_1 < F^{n_2}(0) + m_2,$$

dass

$$F^{n_2-n_1}(F^{n_1}(0)) - F^{n_1}(0) > m_1 - m_2$$

gilt. Per Induktion gilt damit

$$F^{k(n_2-n_1)}(0) - 0 > k\left(m_1 - m_2\right).$$

Dann folgt wie vorhin

$$\begin{aligned}\rho(f) &= \lim_{k\to\infty} \frac{F^{k(n_2-n_1)}(0) - 0}{k\left(n_2 - n_1\right)} \\ &\geq \frac{m_1 - m_2}{n_2 - n_1}\end{aligned}$$

und damit wieder $\rho\left(n_1 - n_2\right) < m_2 - m_1$ und

$$m_1 + n_1\rho < m_2 + n_2\rho$$

wie behauptet. □

Damit können wir auch leicht den Satz beweisen:

BEWEIS. Die Ordnung der Orbits von f wird durch Λ beschrieben und die Ordnung der Orbits von $R_{\rho(f)}$ durch Ω. Nun folgt die Behauptung aus dem Lemma. □