Spezifikation

Wir wissen schon, dass wir Pseudo-Orbits nahe einer hyperbolischen Menge durch ein naheliegendes echtes Orbit „beschatten" können. Allerdings setzte das bislang voraus, dass wir in jedem Schritt nur eine kleine Abweichung zulassen zwischen dem nächsten Punkt auf dem Pseudo-Orbit und dem Bild des aktuellen Punktes.

Jetzt sehen wir eine Methode, die es zuläßt, dass die vorgegebenen Punkte beliebig weit von Bildern der vorigen Punkte entfernt sind, und dennoch eine Beschattungseigenschaft herauskommt: Wir werden sehen, dass wir mehrere endliche Orbitstuecke beliebig vorgeben können und dennoch ein echtes Orbit finden, dass beiden nahekommt. Und welches auch noch eine genau vorgeschriebene Zeit zwischen diesen Segmenten zubringt.

DEFINITION. Für eine bijektive Abbildung $f : X \to X$ ist eine **Spezifikation** eine endliche Sammlung endlicher Teilmengen von $\mathbb{Z}$, d.h. $I_1 = \{a_1, \ldots, b_1\}, \ldots, I_N = \{a_N, \ldots, b_N\}$, sowie eine Abbildung $P : \bigcup_{i=1}^N I_i \to X$, welche jedes I_i auf ein Orbitsegment abbildet, d.h. für $k, l \in I_i$ gilt $P(k) = f^{l-k}(P(l))$.

Die Spezifikation heißt L**-separiert**, wenn $a_{i+1} > b_i + L$ für alle $i = 1, \ldots, N-1$ gilt.

THEOREM. *Sei Λ eine lokal maximale hyperbolische Menge für einen topologisch mischenden Diffeomorphismus $f : U \to M$ auf einer Mannigfaltigkeit M. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $L = L(\varepsilon) < \infty$, so dass jede L-separierte Spezifikation auf M von einem echten Orbit ε-beschattet wird, d.h. es gibt ein $x \in M$, so dass für alle $n \in \bigcup_{i=1}^N I_i$ gilt:*

$$d(f^n(x), P(n)) < \varepsilon$$

und so dass für alle $k > \sum_{i=1}^N$ Länge$(I_i) + NL$ ein periodisches Orbit mit Periode k existiert mit derselben Eigenschaft ($d(f^n(x), P(n)) < \varepsilon$ für alle $n \in \bigcup_{i=1}^N I_i$).

REMARK. Das heißt, wir können zu mehreren vorgegebenen Orbitsegmenten ein Orbit finden, welches diese Segmente ε-genau approximiert, *und welches auch noch exakt eine vorher festgelegte Zeit zwischen den Orbits zubringt.* Dies ist ein wichtiges globales Ergebnis (während Beschattung dagegen lokal erfolgt).

BEWEIS. Sei $x_1 := P(b_1)$ der letzte Punkt der ersten Orbitsegments und $y_1 := P(a_2)$ der erste Punkt des zweiten Segments. Wegen topologischem Mischen schneiden sich $W^u(x)$ und $W^s(y)$ in einem Punkt z. Für k, l groß genug ist $f^k(z), f^{-l}(z)$ beliebig nahe an $y_1, x_{1.}$ Wähle $x := f^{-l-(b_1-a_1)}(z)$. Dann sind die ersten $b_1 - a_1$ Iterationen von x wegen Stetigkeit nahe an $P(a_1), \ldots, P(b_1)$ und wegen dem Schnitt von $W^u(x)$ und $W^s(y)$ und der Wahl von k, l ist $f^{a_2}(x)$ auch nahe an $P(a_2)$. Somit auch auf dem zweiten Intervall I_2.

Nun wiederholen wir die Prozedur: Sei $x_2 := P(b_2)$,$y_2 := P(a_3)$. Finde $z \in W^u(x_2) \cap W^s(y2)$, finde entsprechende k', l', und sei $x := f^{-l'-(b_2-a_2)-l-k-(b_1-a_1)}$. Dieses x unterscheidet sich beliebig wenig vom vorigen. Nach endlich vielen Schritten ist das Verfahren abgeschlossen und das gefundene x hat ein allen Orbitsegmenten nahes Orbit. $\square$