Globale Zusammenhänge

Bis jetzt kennen wir einige wichtige Characteristiken von dynamischen Systemen, z.B. periodische Orbits. Wir können uns fragen: Wie hängen diese (z.B. in der Anzahl) mit anderen numerischen Größen zusammen?

Wir kennen weiterhin zahlreiche einzelne Eigenschaften dynamischer Systeme, z.B. topologische dynamische wie topologische Transitivität, topologisches Mischen, und wir kennen geometrische Strukturen wie (in-)stabile Mannigfaltigkeiten, welche wiederum bestimmte Eigenschaften haben können oder auch nicht, z.B. Dichtheit. Da fragen wir uns nun: Wie hängen diese Eigenschaften zusammen? Implizieren die einen die anderen?

Kurz, es ergeben sich folgende

Fragen:

(1) Welche Zusammenhänge gibt es zwischen der Zahl von periodischen Orbits und anderen, eventuell leichter zu berechnenden Größen?
(2) Gibt es einen Zusammenhang zwischen den globalen (in-)stabilen Mannigfaltigkeiten $W^s(x), W^u(x)$ und dynamischen Eigenschaften wie top. Transitivität, topologischem Mischen?

Antworten:

Zu Frage 1:

DEFINITION. Für eine Abbildung $f : X \to X$ definieren wir die **Zahl periodischer Punkte von Periode höchstens** n als

$$P_n(f) := \#\left\{x \in X : f^k(x) = x \text{ für ein } k \in \{1, \dots, n\}\right\}.$$

Zumindest dann, wenn diese Zahl endlich ist, lohnt es sich, darüber nachzudenken, wie sie von n abhängt.

Die **exponentielle Wachstumsrate der periodischen Punkte** von f ist

$$p(f) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n(f).$$

In vielen wichtigen Fällen existiert der Limes auch. Diese untersuchen wir jetzt.

Die **topologische Entropie** eines Homöomorphismus ist

$$h_{\text{top}}(f) := \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(f, n, \varepsilon),$$

wobei $N(f, n, \varepsilon)$:= maximale Elementzahl einer (n, ε)-separierten Menge M, also einer, für die gilt: $\forall x, y \in M : \max_{0\le i\le n} d(f^i(x), f^i(y)) > \varepsilon$.

THEOREM. *Für einen expansiven Homöomorphismus f eines kompakten topologischen Raumes ist die Wachstumsrate der periodischen Punkte von f höchstens gleich der topologischen Entropie von f.*

Anders gesagt:

$$p(f) \leq h_{top}(f).$$

BEWEIS. Behauptung:

$$A = \{x \in X \mid f^n(x) = x\}$$

ist eine (n, ε_0)-separierte Menge, wobei ε_0 die Expansivitätskonstante von f ist. Begründung: Wenn $d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon_0$ ist für $x, y \in A$ und für alle $i = 0, \ldots, n$, dann gilt das wegen Periodizität von x und y auch für alle $i \in \mathbb{Z}$. Damit folgt wegen Expansivität, dass $x = y$ ist.

Also gilt:

$$\#A \leq N(f, n, \varepsilon_0).$$

Außerdem ist $N(f, n, \varepsilon)$ monoton fallend in ε, denn eine (n, ε)-separierte Menge ist offensichtlich auch (n, ε')-separiert für $\varepsilon' < \varepsilon$. Somit ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \#A &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(f, n, \varepsilon_0) \\
&\leq \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(f, n, \varepsilon) \\
&= h_{\text{top}}(f).
\end{aligned}$$

Nun gilt für eine exponentiell wachsende Folge q^n, dass das n-te Element gleich die Summe der ersten n Elemente ist, bis auf einen Faktor, der nicht von n abhängt. Deswegen ist die exponentielle Wachstumsrate der Zahl aller periodischer Punkte mit Periode=n dieselbe wie die exponentielle Wachstumsrate der Zahl aller periodischer Punkte mit Periode höchstens n. Damit haben wir gezeigt: $p(f) \leq h_{\text{top}}(f)$. $\square$

Die Ungleichheit in der Aussage $p(f) \leq h_{\text{top}}(f)$ scheint im vorigen Beweis nicht „besonders stark" zu sein. Das läßt vermuten, dass in vielen Fällen Gleichheit vorliegt. Wir können zeigen:

THEOREM. *Wenn f ein expansiver Homöomorphismus eines kompakten Raumes ist und die Spezifikationseigenschaft hat, dann gilt*

$$p\left(f|_\Lambda\right) = h_{top}\left(f|_\Lambda\right).$$

BEWEIS. Zur Erinnerung: Die Spezifikationseigenschaft besagt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $L(\varepsilon)$ existiert, so dass unter anderem jedes Orbitsegment der Länge n von einem periodischen Orbit der Länge genau $n + L(\varepsilon)$ beschattet wird.

Wähle nun eine (n, ε)-separierte Menge A. Für $x \in A$ gibt es also einen periodischen Punkt y mit Periode $n+L(\varepsilon/2)$, so dass $d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon/2$ für alle $i = 0, \dots, n$ gilt. Also ist

$$P_{n+L(\varepsilon/2)} \geq N(f, n, \varepsilon)$$

und somit

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_{n+L(\varepsilon/2)} \\ &\geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(f, n, \varepsilon) \end{aligned}$$

für alle ε, und somit gilt

$$p(f) = h_{\text{top}}(f).$$

□

Man kann sogar zeigen (mit viel mehr Aufwand): Unter denselben Voraussetzungen (Kompaktheit, Expansivität, Spezifikationseigenschaft) gibt es c_1, c_2 mit

$$c_1 e^{hn} \leq P_n(f) \leq c_2 e^{hn}$$

mit $h = h_{\text{top}}(f)$.