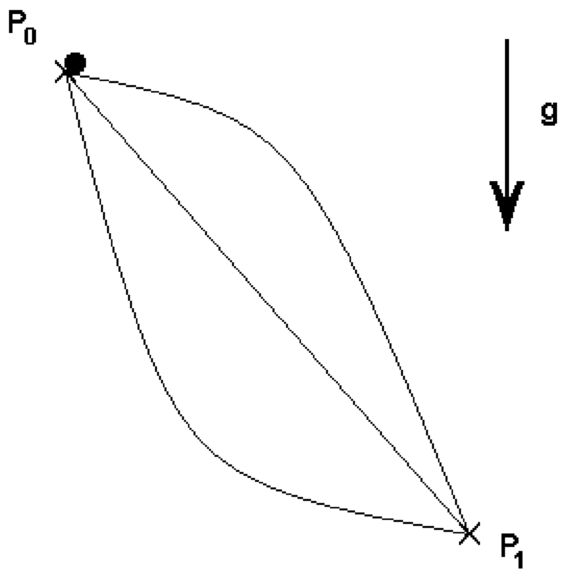
Variationsrechnung und Euler-Lagrangesche Differentialgleichung

Seminar Gewöhnliche Differentialgleichungen

von Tim Budde

1 Motivation: Das Problem der Brachistochrone

Bemerkung 1.1. Das Problem der Brachistochrone ist ein physikalisch/mathematisches Problem, das den wesentlichen Anstoss zur Variationsrechnung gab. Es wurde 1696 von Johann Bernoulli gestellt. Zu ermitteln ist diejenige Verbindungsstrecke zwischen 2 verschiedenen Punkten im Raum, auf der eine vorerst ruhende Kugel sich in der kürzesten Zeit vom höheren zum niedrigeren Punkt bewegt (bedingt durch Schwerkraft, jedoch ohne Luftwiderstand und Rollreibung).



Rechnung 1.2. Wir berechnen die Gesamtlaufzeit t_G der Kugel.
O.B.d.A. lösen wir das Problem im $\mathbb{R}^2$.
Die Kugel laufe von $P_0 = (0, 0)$ nach $P_1 = (x_1, y_1), \quad x_1 > 0, \; y_1 < 0$.
Die Schwerkraft wirke in Richtung der negativen Y-Achse mit dem Betrag g.
Die Kugel habe die Masse m.
Sei eine Bahn, d.h. stetig differenzierbares $y : [0, x_1] \to \mathbb{R}$ vorgegeben mit $y(0) = 0$ und $y(x_1) = y_1$.

i) Sei $v : [0, x_1] \to \mathbb{R}$ die Funktion, die für eine gegebene X-Position auf der Bahn die Geschwindigkeit der Kugel angibt.
Da die Kugel in P_0 ruht, folgt aus dem Energieerhaltungssatz die Gleichheit von potentieller und kinetischer Energie (da wir von äußeren Einflüssen wie Luftwiderstand und Rollreibung absehen wollen):
$-mgy(x) = \frac{1}{2}mv(x)^2$
$\implies v(x) = \sqrt{-2gy(x)}$
Es ist klar, dass es Bahnen gibt, bei denen die Kugel nie im Punkt P_1 ankommt. Wir sehen an der Formel, dass wir genau solche Bahnen ausschliessen, wenn wir zusätzlich fordern, dass gilt: $y < 0$ auf $(0, x_1)$.

ii) Also können wir mit $s_G \in \mathbb{R}_+$ die Gesamtlänge der Bahn bezeichnen.
Dann bezeichne $g : [0, x_1] \to [0, s_G]$ die Funktion, die zu gegebener zurückgelegter Strecke auf der X-Achse die zurückgelegte Strecke auf dem Bogen liefert.
Es gilt also: $g(x) = \int\limits_0^x \sqrt{1 + (y'(z))^2} dz$ und damit $g'(x) = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$. g ist bijektiv und stetig (wegen $g(0) = 0$ monoton steigend).

iii) Sei $s : [0, t_G] \to [0, s_G]$ die Funktion, die zu einem gegebenen Zeitpunkt die zurückgelegte Strecke angibt. Nachdem wir Bahnen ausgeschlossen haben, in denen die Kugel nicht ankommt, ist s bijektiv und stetig (wegen $s(0) = 0$ also monoton steigend).
Aus dem Satz über das Differential der Umkehrfunktion erhalten wir:
$(s^{-1})'(x) = \frac{1}{(s' \circ s^{-1})(x)}$. Da $s' \circ s^{-1}$ die Abbildung einer gegebenen Strecke auf der Bahn auf die Geschwindigkeit ist, ebenso wie $v \circ g^{-1}$ sind diese Funktionen gleich:

$$\begin{tikzcd}
 & Zeit \arrow[dr, mapsto, bend left, "s'"] & \\
Strecke \arrow[ur, mapsto, bend left, "s^{-1}"] \arrow[dr, mapsto, bend right, "g^{-1}"'] & & Geschwindigkeit \\
 & XStrecke \arrow[ur, mapsto, bend right, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

iv) Also gilt:

$$
\begin{aligned}
& t_G \\
&= \int_0^{t_G} 1(t)dt \\
&= \int_{s(0)}^{s(t_G)} 1(s^{-1}(z))(s^{-1})'(z)dz \text{ (Substitution mit } s^{-1}) \\
&= \int_0^{s_G} \frac{1}{(s' \circ s^{-1})(z)} dz \text{ (nach iii)} \\
&= \int_0^{s_G} \frac{1}{(v \circ g^{-1})(z)} dz \text{ (nach iii)} \\
&= \int_{g^{-1}(0)}^{g^{-1}(s_G)} \frac{1}{v(g^{-1}(g(x)))} \cdot g'(x)dx \text{ (Substitution mit } g) \\
&= \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{v(x)} dx \text{ (nach ii)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)}} dx \text{ (nach i)}
\end{aligned}
$$

Wir suchen also diejenige Bahn y, die eine minimale Gesamtlaufzeit liefert, also das obige Integral minimiert.
Eine solche Aufgabe wird in der Theorie der Variationsrechnung verallgemeinert.

2 Theorie: Affine Unterräume

Definition 2.1. Sei K ein Körper, V ein Vektorraum über K und U ein Untervektorraum von V. Eine Teilmenge X von V heisst **affiner Unterraum** zu U $:\Longleftrightarrow \; \exists\, v \in V$ mit $X = v + U$.

Satz 2.2. *Es gilt mit den Bezeichnungen aus der Definition:*
$x + \lambda u \in X \quad \forall\, x \in X, \lambda \in K, u \in U$

Beweis. Per Definition existieren $v \in V$ und $u' \in U$ mit $x = v + u'$.
$\implies x + \lambda u = v + \underbrace{u' + \lambda u}_{\in U} \in X$. $\square$

3 Theorie: Funktionale

Bezeichnung 3.1. Im Folgenden bezeichne $\mathcal{U}$ einen Untervektorraum des Vektorraums $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F}$ einen zu $\mathcal{U}$ affinen Unterraum.

Definition 3.2. Eine Abbildung $\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ heisst **Funktional** auf $\mathcal{F}$.

Ein Funktional $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ heisst **differenzierbares Funktional** auf $\mathcal{F}$
$:\Longleftrightarrow \;\exists\, F, R : \mathcal{F} \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ so dass

i) $\Phi(f+h) - \Phi(f) = F(f,h) + R(f,h) \;\; \forall\, f \in \mathcal{F}, h \in \mathcal{U}$.

ii) $F(f, \cdot)$ ist eine lineare Abbildung für alle $f \in \mathcal{F}$.

iii) $R(f,h) = \mathcal{O}(h^2)$ (d.h. $|h| < \varepsilon, |\frac{dh}{dx}| < \varepsilon \Rightarrow |R(f,h)| < C\varepsilon^2$)

Wir nennen die (eindeutige) Abbildung F das **Differential** des Funktionals Φ.

Beispiel 3.3. *Das Funktional* $I : \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int\limits_a^b f(x)dx$ *berechnet das Integral der Kurve.*

Beispiel 3.4. *Das Funktional* $B : \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$ *berechnet die Bogenlänge.*

Definition 3.5. Sei Φ ein differenzierbares Funktional auf $\mathcal{F}$, F dessen Differential und $f \in \mathcal{F}$.

f heisst **kritischer Punkt** von Φ $:\iff F(f,h) = 0 \;\; \forall\, h \in \mathcal{U}$

f heisst **Minimum** von Φ $:\iff$ Es gibt eine Umgebung $\mathcal{V}$ von f mit $\Phi(f) \leq \Phi(g) \;\; \forall\, g \in \mathcal{V}$
f heisst **Maximum** von Φ $:\iff$ Es gibt eine Umgebung $\mathcal{V}$ von f mit $\Phi(f) \geq \Phi(g) \;\; \forall\, g \in \mathcal{V}$
f heisst **Extremum** von Φ $:\iff$ f ist Minimum oder Maximum.

Bemerkung 3.6. Die Forderung, dass das Differential des Funktionals für kritische Punkte null sein soll, erinnert an die entsprechende Eigenschaft von Minima und Maxima einer reellen Funktion.
Die Variationsrechnung ist das mathematische Teilgebiet, das sich mit dem Finden von Extrema von Funktionalen befasst.

4 Das Fundamentallemma der Variationsrechnung

Satz 4.1 (Fundamentallemma). *Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig und für alle stetig differenzierbaren Funktionen $\eta : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\eta(a) = 0 = \eta(b)$ gelte $\int_a^b g(x) * \eta(x)dx = 0$.*
Dann ist $g \equiv 0$ (d.h. auf ganz $[a, b]$).

Beweis. Durch Widerspruch: Angenommen, in $x_0 \in (a, b)$ gelte $g(x_0) = Z \neq 0$.
Wegen der Stetigkeit von g gibt es dann eine ε-Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ auf der g annähernd Z ist.
Wir wählen ein stetig differenzierbares $\eta : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, das auf $(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2})$ den Wert Z annimmt und außerhalb von $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ den Wert $0 \in \mathbb{R}^n$, also insbesondere $\eta(a) = 0 = \eta(b)$.
Für diese Wahl von η kann das Integral $\int_a^b g(x) * \eta(x)dx$ nicht null sein, im Widerspruch zur Voraussetzung. □

5 Die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung

Definition 5.1. Im Folgenden seien $p, q \in \mathbb{R}^n$ und es bezeichnen
$\mathcal{U} := \{h : [a,b] \to \mathbb{R}^n \mid h$ stetig diffbar, $h(a) = 0, h(b) = 0\}$ und
$\mathcal{F} := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}^n \mid f$ stetig diffbar, $f(a) = p, f(b) = q\}$
den für Funktionale geforderten Untervektorraum und den affinen Unterraum.
Sei $L : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

Wir definieren ein Funktional $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ durch $f \mapsto \int\limits_a^b L\big(x, f(x), f'(x)\big)dx$.

Für dieses Funktional heisst L **Lagrangesche Funktion**.

Mit $\varphi : \mathcal{F} \times \mathcal{U} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f, h, \varepsilon) \mapsto \Phi(f + \varepsilon h)$
definieren wir die **erste und zweite Variation des Funktionals**:
$\delta\Phi(f,h) := D_3\varphi(f,h,0)$ und $\delta^2\Phi(f,h) := D_3D_3\varphi(f,h,0)$.

Satz 5.2. Φ *ist ein differenzierbares Funktional und das Differential von* Φ *ist gegeben durch*

$$F(f,h) := \int_a^b \left[D_2L\big(x,f(x),f'(x)\big) - \tfrac{d}{dx}D_3L\big(x,f(x),f'(x)\big)\right] * h(x)dx$$

Beweis. Seien $f \in \mathcal{F}, h \in \mathcal{U}$.
Für festes $x \in [a,b]$ definieren wir $L_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto L(x,u,v)$.
Wir wenden die Taylorsche Formel bis zum zweiten Restglied an und erhalten:

$$L_x\big((u,v)+(h_1,h_2)\big) = L_x\big((u,v)\big) + \text{grad}L_x\big((u,v)\big) * (h_1,h_2) + \mathcal{O}\big((h_1,h_2)^2\big)$$

mit $\text{grad}L_x\big((u,v)\big) * (h_1,h_2) = D_1L_x(u,v) * h_1 + D_2L_x(u,v) * h_2$
Wir setzen $h_1 := h(x),\ h_2 := h'(x),\ u := f(x),\ v := f'(x)$ und haben für beliebiges $x \in [a,b]$ gezeigt:

$$L\big(x,f(x)+h(x),f'(x)+h'(x)\big) = L\big(x,f(x),f'(x)\big)+D_2L\big(x,f(x),f'(x)\big)*h(x)+D_3L\big(x,f(x),f'(x)\big)*h'(x)+\mathcal{O}(h^2)$$

$\Phi(f+h) - \Phi(f)$

$= \int_a^b L\big(x,(f+h)(x),(f+h)'(x)\big)dx - \int_a^b L\big(x,f(x),f'(x)\big)dx \quad$ (Per Definition)

$= \int_a^b \left[L\big(x,f(x)+h(x),f'(x)+h'(x)\big)dx - L\big(x,f(x),f'(x)\big)\right]dx \quad$ (Linearität des Integrals)

$= \int_a^b \left[D_2L\big(x,f(x),f'(x)\big) * h(x) + D_3L\big(x,f(x),f'(x)\big) * h'(x) + \mathcal{O}(h^2)\right]dx \quad$ (siehe oben)

$= \int_a^b D_2L\big(x,f(x),f'(x)\big) * h(x)dx + \int_a^b D_3L\big(x,f(x),f'(x)\big) * h'(x)dx + \mathcal{O}(h^2) \quad$ (Linearität)

$= \int_a^b D_2L\big(x,f(x),f'(x)\big) * h(x)dx - \int_a^b \tfrac{d}{dx}D_3L\big(x,f(x),f'(x)\big) * h(x)dx + \Big(D_3L\big(x,f(x),f'(x)\big) * h(x)\Big)\Big|_a^b + \mathcal{O}(h^2)$
(partielle Integration)

$$= \int_a^b D_2L\big(x, f(x), f'(x)\big) * h(x)dx - \int_a^b \tfrac{d}{dx} D_3L\big(x, f(x), f'(x)\big) * h(x)dx + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{(da } h(a) = h(b) = 0\text{)}$$

$$= \underbrace{\int_a^b \Big[D_2L\big(x, f(x), f'(x)\big) - \frac{d}{dx} D_3L\big(x, f(x), f'(x)\big)\Big] * h(x)dx}_{=F(f,h)} + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{(Linearität)}$$

Es bleibt zu zeigen, dass F im zweiten Argument linear ist. Dies folgt sofort aus der Linearität des Integrals und des Skalarprodukts. $\square$

Bemerkung 5.3. Wir wollen als notwendige Bedingung für ein Extremum f des Funktionals Φ die **Euler-Lagrangesche Differentialgleichung**
$D_2L\big(x, f(x), f'(x)\big) - \frac{d}{dx}D_3L\big(x, f(x), f'(x)\big) = 0$ herleiten.

Bemerkung 5.4. Die Schreibweise variiert in der Fachliteratur, z.B. wird statt L manchmal F verwendet mit vertauschten und weggelassenen Argumenten und t statt x. Ebenso wird für partielle Ableitungen auch das Symbol ∂ verwendet. Die Euler-Lagrangesche DGL kann also entsprechend auch so aussehen:
$\frac{\partial F}{\partial y}(f, \dot{f}, t) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p}(f, \dot{f}, t) = 0.$

Satz 5.5. *$f \in \mathcal{F}$ ist kritischer Punkt des Funktionals $\Phi \iff f$ erfüllt die Euler-Lagrangesche DGL*

Beweis. $f \in \mathcal{F}$ ist kritischer Punkt von Φ

$\iff F(f,h) = 0 \;\; \forall\, h \in \mathcal{U}$ (per Definition 3.5)

$\iff \int\limits_a^b \left[D_2L\big(x, f(x), f'(x)\big) - \frac{d}{dx} D_3L\big(x, f(x), f'(x)\big)\right] * h(x)dx = 0 \;\; \forall\, h \in \mathcal{U}$ (nach Satz 5.2)

$\iff D_2L\big(x, f(x), f'(x)\big) - \frac{d}{dx} D_3L\big(x, f(x), f'(x)\big) = 0$ (Fundamentallemma + triviale Rückrichtung)

$\iff f$ erfüllt die Euler-Lagrangesche DGL (per Definition) □

Bemerkung 5.6. Manche Bücher definieren kritische Punkte aufgrund dieser Äquivalenz auch einfach als Lösungen der Euler-Lagrangeschen DGL. Das ist jedoch nur für Funktionale der Form $\int_a^b L\big(x, f(x), f'(x)\big)dx$ möglich, während wir den Begriff des kritischen Punktes für beliebige differenzierbare Funktionale erklärt haben.

Lemma 5.7. *Es gilt:*

$$D_3\varphi(f,h,\varepsilon) = \int\limits_a^b \Big[D_2L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big) - \tfrac{d}{dx}D_3L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big)\Big] * h(x)dx$$

Beweis. $D_3\varphi(f,h,\varepsilon)$

$= \frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_a^b L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big)dx \quad$ (Per Definition 5.1)

$= \int\limits_a^b \frac{d}{d\varepsilon}\Big[L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big)\Big]dx \quad$ (Vertauschung von Grenzwertprozessen)

$= \int\limits_a^b \Big[D_2L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big) * h(x) + D_3L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big) * h'(x)\Big]dx \quad$ (Kettenregel)

$= \int\limits_a^b D_2L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big) * h(x)dx$

$\quad + \int\limits_a^b D_3L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big) * h'(x)dx \quad$ (Linearität des Integrals)

$= \int\limits_a^b D_2L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big) * h(x)dx$

$\quad - \int\limits_a^b \frac{d}{dx}D_3L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big) * h(x)dx$

$\quad + \Big[D_3L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big) * h(x)\Big]\Big|_a^b \quad$ (Partielle Integration)

$= \int\limits_a^b D_2L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big) * h(x)dx$

$-\int\limits_a^b \frac{d}{dx} D_3 L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big) * h(x)dx \quad$ (Wegen $h(a) = h(b) = 0$)

$= \int\limits_a^b \Big[D_2 L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big) - \frac{d}{dx} D_3 L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big)\Big] * h(x)dx \quad$ (Linearität des Integrals und des Skalarprodukts) $\square$

Satz 5.8. *$f \in \mathcal{F}$ ist Extremum des Funktionals Φ $\implies$ f ist kritischer Punkt von Φ.*

Beweis. Mit φ aus Definition 5.1 ist $\varphi(f,h,\varepsilon) = \int_a^b L\big(x, f(x)+\varepsilon h(x), f'(x)+\varepsilon h'(x)\big)dx$

Sei $f \in \mathcal{F}$ ein Minimum von Φ.

$\implies \exists$ Umgebung $\mathcal{V}$ von f mit $\Phi(f) \leq \Phi(g)\ \ \forall\, g \in \mathcal{V}$ (nach Definition 3.5)

$\implies \forall\, h \in \mathcal{U}\ \ \exists$ Umgebung $U(h)$ von $0 \in \mathbb{R}$ mit $\Phi(f) \leq \Phi(f+\varepsilon h)\ \ \forall\, \varepsilon \in U(h)$ (wegen Satz 2.2)

$\implies \forall\, h \in \mathcal{U}\ \ \varphi(f,h,0) \leq \varphi(f,h,\varepsilon)\ \ \forall\, \varepsilon \in U(h)$ (per Definition von φ)

$\implies D_3\varphi(f,h,0) = 0\ \ \forall\, h \in \mathcal{U}$ (Da $\varphi(f,h,\cdot)$ bei $\varepsilon = 0$ ein lokales Minimum hat)

$\implies \int_a^b \Big[D_2L\big(x,f(x),f'(x)\big) - \frac{d}{dx}D_3L\big(x,f(x),f'(x)\big)\Big] * h(x)dx = 0\ \ \forall\, h \in \mathcal{U}$ (Nach Lemma 5.7)

$\implies F(f,h) = 0\ \ \forall\, h \in \mathcal{U}$ (nach Satz 5.2)

$\implies f \in \mathcal{F}$ ist kritischer Punkt von Φ (per Definition 3.5)

$\square$

Bemerkung 5.9. Wir haben also gezeigt, dass für diese besonderen Funktionale eine notwendige Bedingung eines Extremum ist, dass dieses ein kritischer Punkt ist (und damit nach 5.5 die Euler-Lagrangesche DGL erfüllt).
Es ist jedoch keine hinreichende, d.h. es gibt kritische Punkte, die kein Extremum sind.
Anders ausgedrückt: Finden wir eine Lösung der Euler-Lagrangeschen DGL (und damit einen kritischen Punkt), dann können wir nicht mit Sicherheit sagen, dass wir ein Extremum des Funktionals gefunden haben.
Bei Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist das bekannterweise ebenso möglich: Eine Sattelstelle hat das Differential null (ist also in unserem Sinne ein kritischer Punkt), ist jedoch kein Extremum.
Weitere notwendige Bedingungen kann man z.B. herleiten, indem man die zweite Variation benutzt. Darauf wollen wir im Weiteren jedoch nicht eingehen.

6 Beispiele für die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung

Wir bringen 2 (einfache) Beispiele zur Benutzung der Euler-Lagrangeschen DGL:

Satz 6.1. *Es gibt keine Extrema für das Funktional aus 3.3 (d.h. es gibt keine stetige Funktion, deren Integral maximal oder minimal ist).*

Beweis. Durch Widerspruch: Angenommen, es gibt ein Extremum $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.
Nach Satz 5.8 ist f ein kritischer Punkt und erfüllt damit nach Satz 5.5 die Euler-Lagrangesche DGL.
Die Funktion L nach Definition 5.1 dieses Funktionals ist definiert durch $L(x,y,p) = y$.
Damit folgt $D_2L(x,y,p) = 1$ und $D_3L(x,y,p) = 0$. Mit der Euler-Lagrangeschen DGL folgt also: $0 = D_2L(x,f(x),f'(x)) - \frac{d}{dx}D_3L(x,f(x),f'(x)) = 1 - 0 = 1$ $\square$

Satz 6.2. *Extrema für das Funktional aus 3.4 können nur Geraden sein. (d.h. nur Geraden können die Bogenlänge minimieren oder maximieren).*

Beweis. Angenommen, es gibt ein Extremum $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$.
Die Funktion L nach Definition 5.1 dieses Funktionals ist definiert durch $L(x,y,p) = \sqrt{1+p^2}$.
Damit folgt $D_2L(x,y,p) = 0$ und $D_3L(x,y,p) = \frac{2p}{2\sqrt{1+p^2}} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$.
Die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung liefert also:

$$\frac{d}{dx}\frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} = 0$$

$$\Longrightarrow \ \exists\, c \in \mathbb{R} : \frac{f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}} = c \quad \forall\, x \in [a,b]$$

$$\overset{\star}{\Longrightarrow} \ \exists\, d \in \mathbb{R} : f'(x) = d$$

$$\Longrightarrow \ f(x) = \alpha + dx$$

$\star$: $\exists!\ y$ mit $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = c$, denn wegen $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = c \implies y_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}}$ kommen nur y_1 und y_2 in Frage. Für diese gilt: $\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}} = c$ und $\frac{y_2}{\sqrt{1+y_2^2}} = -c$. □

Bemerkung 6.3. Im zweiten Beispiel haben wir die Existenz eines Extremum vorausgesetzt; daher sagt der Satz nur "Extrema können nur Geraden sein".
Hier wird ein Problem deutlich:
Die Existenz eines Extremum kann man mit der Euler-Lagrangeschen DGL nicht nachweisen.
Mit dem Satz vom Minimum und Maximum kommen wir hier auch nicht weiter, denn dieser setzt einen kompakten Definitionsbereich voraus, $\mathcal{F}$ ist aber nicht kompakt.
(Bei physikalischen Aufgaben wie dem Brachistochronenproblem kann man sich manchmal behelfen, indem man durch einfache Überlegungen herausfindet, dass es ein Minimum geben muss.)

7 Verallgemeinerung von Euler-Lagrange

Bemerkung 7.1. Tauchen unter dem Integral des Funktionals auch höhere Ableitungen auf, haben wir eine allgemeinere Darstellung der Euler-Lagrangeschen DGL. Diese wollen wir hier ohne Beweis vorstellen.

Satz 7.2 (ohne Beweis). *Mit* $p_0, \dots p_{m-1}, q_0, \dots q_{m-1} \in \mathbb{R}^n$,
$\mathcal{U} := \{h : [a,b] \to \mathbb{R}^n \mid h \text{ stetig diffbar}, h^{(j)}(a) = 0, h^{(j)}(b) = 0 \text{ für } j = 0, \dots, m-1\}$,
$\mathcal{F} := \{f : [a,b] \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ stetig diffbar}, f^{(j)}(a) = p_j, f^{(j)}(b) = q_j \text{ für } j = 0, \dots, m-1\}$
und $L : [a,b] \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{m-mal} \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar*

sei $\Phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int\limits_a^b L\big(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(m-1)}(x)\big)dx.$

Dann gilt:

$f \in \mathcal{F}$ *ist kritischer Punkt des Funktionals* $\Phi \iff f$ *erfüllt die Euler-Lagrangesche DGL:*

$$D_2L\big(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(m-1)}(x)\big)$$
$$-\tfrac{d}{dx}D_3L\big(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(m-1)}(x)\big)$$
$$+\tfrac{d^2}{dx^2}D_4L\big(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(m-1)}(x)\big)$$
$$\dots$$
$$+(-1)^m\tfrac{d^m}{dx^m}D_mL\big(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(m-1)}(x)\big) = 0.$$

8 Das Hamiltonsche Prinzip

Bemerkung 8.1. Das Hamiltonsche Prinzip ist ein wichtiges Beispiel dafür, dass die Variationsrechnung in der Physik eine grosse Rolle spielt.

Theorem 8.2 (Das Hamiltonsche Prinzip). *Wir betrachten ein Punktsystem, dessen Zustand sich im Zeitintervall* $[t_0, t_1]$ *ändert, d.h.*
$y \in \mathscr{C}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ *gebe dessen Position zu einem gegebenen Zeitpunkt an.*
$T : \mathscr{C}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ *gebe die kinetische Energie ("Bewegungsenergie") des Systems zum angegebenen Zeitpunkt an.*
$V : \mathscr{C}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ *gebe die potentielle Energie ("Lageenergie") des Systems zum angegebenen Zeitpunkt an.*

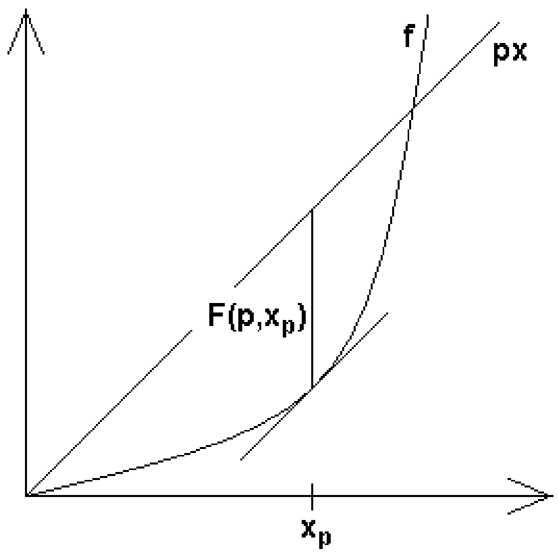
Wir definieren das Funktional $\Phi : \mathscr{C}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto \int_{t_0}^{t_1} (T - V)(y, t)dt.$

Das Hamiltonsche Prinzip besagt nun, dass die Bahn y*, die das Punktsystem nimmt, ein kritischer Punkt dieses Funktionals ist.*

Beispiel 8.3. *Unser Punktsystem sei ein Teilchen mit Masse m, dass sich in einer Dimension, der Höhe, unter Einfluss der Schwerkraft bewegt.*
Dann ist $T(y,t) = \frac{1}{2}m\big(y'(t)\big)^2$ *und* $V(y,t) = -mgy(t)$
Damit ist Φ ein Funktional der Form aus Definition 5.1 $\Big(\int\limits_{t_0}^{t_1} L\Big(t, y(t), y'(t)\Big)dt\Big)$
mit Lagrangescher Funktion $L(t,y,p) = \frac{1}{2}mp^2 + mgy$
und wir können die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung anwenden:
$mg - \frac{d}{dt}\Big(m \cdot y'(t)\Big) = 0$, *d.h.* $y''(t) = g$.
Damit haben wir die bekannte Bewegungsgleichung für den freien Fall: $y(t) = c_1 + c_2 t + \frac{gt^2}{2}$.
c_1 *und* c_2 *bestimmen sich aus den Randbedingungen Anfangsort und Anfangsgeschwindigkeit.*

9 Die Legendre Transformation

Definition 9.1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare, konvexe Funktion.
Wir wollen zu f eine Funktion $\mathscr{L}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren, die **Legendre-Transformierte**.
Der Funktionswert von $\mathscr{L}f$ an einer Stelle p wird wie folgt ermittelt:
Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ ist $F(p, x) = px - f(x)$ der Abstand zwischen der Geraden durch den Ursprung mit Steigung p und dem Funktionsgraphen von f.
Wegen der Konvexität gibt es nun ein eindeutig bestimmtes $x(p)$, an dem dieser Abstand maximal ist.
An dieser Stelle gilt also:
$D_2F\big(p, x(p)\big) = 0$
$\iff p - f'\big(x(p)\big) = 0$
$\iff f'\big(x(p)\big) = p.$
Wir definieren die Legendre-Transformierte durch diesen maximalen Abstand, also
$\mathscr{L}f(p) := F\big(p, x(p)\big).$


f
px
F(p,x_p)
x_p

Beispiel 9.2. *Sei* $f(x) = ax^2$ *mit* $a > 0$.
Also ist $f'(x) = 2ax$ *und damit folgt* $2ax(p) = f'\big(x(p)\big) = p$ *also* $x(p) = \frac{p}{2a}$.
Es ist $F(p, x) = px - ax^2$
Die Legendre-Transformierte ist also $\mathscr{L}f(p) = F\big(p, x(p)\big) = p\frac{p}{2a} - a\frac{p^2}{4a^2} = \frac{p^2}{4a}$
und damit wieder eine Parabel.

Definition 9.3. Jetzt wollen wir entsprechend die Legendre-Transformation einer konvexen, differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren.
Die Legendre-Transformierte ist dann die Funktion $\mathscr{L}f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$p \mapsto p * x(p) - f\big(x(p)\big)$ wobei $x(p)$ eindeutig definiert ist durch die Bedingung $p = Df\big(x(p)\big)$.

Satz 9.4. *Die Legendre-Transformation ist involutorisch. Das heisst es gilt $\mathscr{L} \circ \mathscr{L} = id$*

Beweis.

i) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann folgt:
$\mathscr{L}f(p) = p * x(p) - f\big(x(p)\big)$ mit $f'\big(x(p)\big) = p$
Daraus folgt: $\big(\mathscr{L}f\big)'(p) = x(p) + x'(p) * p - x'(p) * f'\big(x(p)\big) = x(p)$.

ii) Weiterhin gilt: $\mathscr{L}\mathscr{L}f(q) = q * y(q) - \mathscr{L}f\big(y(q)\big)$ mit $\big(\mathscr{L}f\big)'\big(y(q)\big) = q$
Es gilt also:
$x\big(y(q)\big)$
$= \big(\mathscr{L}f\big)'\big(y(q)\big)$ (siehe i)
$= q$ (siehe ii)

iii) Wir setzen ein und erhalten:
$\mathscr{L}\mathscr{L}f(q)$
$= q * y(q) - \mathscr{L}f\big(y(q)\big)$ (nach ii)
$= q * y(q) - \Bigg(y(q) * x\big(y(q)\big) - f\Big(x\big(y(q)\big)\Big)\Bigg)$ (siehe i)
$= q * y(q) - y(q) * q + f\Big(q\Big)$ (siehe ii)
$= f(q)$
$\implies \mathscr{L} \circ \mathscr{L} = id$

□

10 Legendre-Transformierte als Hamiltonfunktion

Satz 10.1.

Sei $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und konvex im zweiten Argument, also ist für festes $q \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ die Funktion $L_{q,t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto L(q,z,t)$ konvex.

Erfüllt $q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ die Euler-Lagrangesche Differentialgleichung
$D_1 L\big(q(t), \dot{q}(t), t\big) = \frac{d}{dt} D_2 L\big(q(t), \dot{q}(t), t\big)$
dann gilt:
$(p,q) : [a,b] \to \mathbb{R}^{2n}$ erfüllt das folgende Hamiltonsystem:

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -D_2 H\big(p(t), q(t), t\big) \\ \dot{q}(t) &= D_1 H\big(p(t), q(t), t\big) \end{aligned}$$

wobei $H(p,q,t) = \mathscr{L} L_{q,t}(p)$ die Legendre-Transformierte der Lagrangeschen Funktion im zweiten Argument ist
und $p : [a,b] \to \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto D_2 L\big(q(t), \dot{q}(t), t\big)$ ist.

Beweis.

i) Es ist $H(p,q,t) = \mathscr{L}L_{q,t}(p) = p * x(p) - L_{q,t}\big(x(p)\big)$ mit $x(p)$ eindeutig (wegen der Konvexität) definiert durch die Bedingung: $p = L'_{q,t}\big(x(p)\big) = D_2L(q,x(p),t)$.
Später setzen wir $p(t)$ statt p und $q(t)$ für q ein. Dann folgt aus der Definition $p(t) = D_2L\big(q(t),\dot{q}(t),t\big)$ nämlich wegen der Konvexität eindeutig $x\big(p(t)\big) = \dot{q}(t)$.

ii) $D_1H(p,q,t)$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{\partial}{\partial p}\Big(p * x(p) - L_{q,t}\big(x(p)\big)\Big)\\
&= x(p) + p * x'(p) - L'_{q,t}\big(x(p)\big) * x'(p) \qquad \text{(Kettenregel)}\\
&= x(p) + p * x'(p) - p * x'(p) \qquad \text{(siehe i)}\\
&= x(p)\\
&\implies D_1H\big(p(t),q(t),t\big) = x\big(p(t)\big) = \dot{q}(t) \qquad \text{(siehe i)}
\end{aligned}
$$

iii) $-D_2H(p,q,t)$

$$
\begin{aligned}
&= -\tfrac{\partial}{\partial q}\Big(p * x(p) - L_{q,t}\big(x(p)\big)\Big)\\
&= \tfrac{\partial}{\partial q}L_{q,t}\big(x(p)\big)\\
&= D_1L(q,x(p),t)\\
&\implies -D_2H\big(p(t),q(t),t\big)\\
&= D_1L\big(q(t),x\big(p(t)\big),t\big)\\
&= D_1L\big(q(t),\dot{q}(t),t\big) \qquad \text{(siehe i)}\\
&= \tfrac{d}{dt}D_2L\big(q(t),\dot{q}(t),t\big) \qquad \text{(Euler-Lagrangesche DGL)}\\
&= \tfrac{d}{dt}p(t) \qquad \text{(Per Definition von } p)\\
&= \dot{p}(t)
\end{aligned}
$$

$\square$

Ende...

Vielen Dank für's Zuhören!