Seminarvortrag: Verkehrsdynamik

Universität Hamburg

von Sven Heins
unter der Leitung von Prof. Roland Gunesch

03.11.2006

Problemstellung:

In diesem Seminar werden zwei Modelle zur Simulation von Verkehrsdynamik vorgestellt:

1. „Mikroskopisches System“

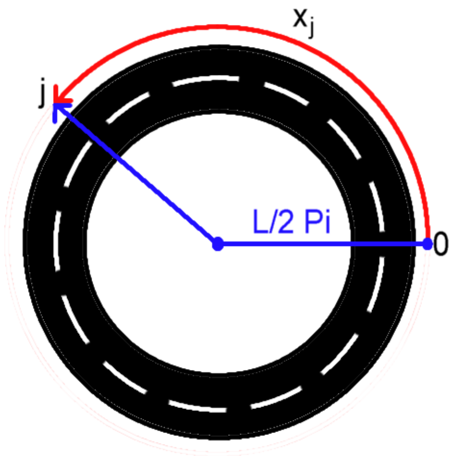
2. „Makroskopisches System“

Das mikroskopische Modell beschäftigt sich mit dem sogenannten *car-following*-Prinzip. Es findet in einem Kreisverkehr einer vorgegebenen Länge mit einer konstanten Anzahl an Autos statt. Jedes Auto bestimmt seine Beschleunigung in Abhängigkeit der Distanz und Geschwindigkeit des vorrausfahrenden Autos. Wir untersuchen hierbei, ob es eine Lösung des entstehenden Differentialgleichungssystems gibt, bei der alle Autos mit konstanter Geschindigkeit fahren, bzw. ob es zusätzlich noch periodische Lösungen gibt. Insbesondere interessiert uns auch die Stabilität der konstanten und der periodischen Lösung, wobei die sogenannte Hopfverzweigung/ Hopfbifurkation eine wichtige Rolle spielt.

In einem makroskopischen Modell spielen die einzelnen Autos keine Rolle. Man betrachtet hierbei den Verkehrsfluss als Ganzes. Die Verkehrsdichte und die durchschnittliche Geschwindigkeit des Verkehrsflusses werden untersucht. In der *Transportgleichung* bzw. *hyperbolischen Gleichung* kann das man unter bestimmten Gegebenheiten zum Beispiel „Stauentwicklung“ oder eine „optimale Ampelschaltung“ an einer Kreuzung untersuchen. Zum Schluss soll als praktische Anwendung noch eine Stauausbreitung modelliert werden.

1 Mikroskopisches System

Folgendes Bild soll die Anordnung der Autos auf dem Kreisverkehr verdeutlichen:



Hierbei ist N die Anzahl der Autos und L die Länge des Kreisverkehrs.
Die Koordinaten x_j geben den Abstand zum Ursprung 0 an.

Daraus ergibt sich folgende Differentialgleichung 2. Ordnung (Beschleunigungsgleichung):

$$\ddot{x}_j(t) = \frac{1}{\tau_j}[V_j(x_{j+1}(t) - x_j(t)) - \dot{x}_j(t)], \qquad j = 1, \dots, N$$
$$x_{N+1} = x_1 + L$$

Die Variable τ_j ist die Reaktionszeit des j-ten Fahrers, und die Funktion V_j berechnet für jeden Fahrer die optimale Geschwindigkeit anhand der Distanz zum Vordermann.
Dieses System formen wir zu einem DGL-System 1.Ordnung um:

$$\begin{cases} \dot{x}_j = y_j \\ \dot{y}_j = \frac{1}{\tau_j}[V_j(x_{j+1} - x_j) - y_j] \end{cases}, \qquad j = 1, \dots, N$$

Nun wollen wir realistische Bedingungen an die Geschwindigkeitsfunktionen stellen:

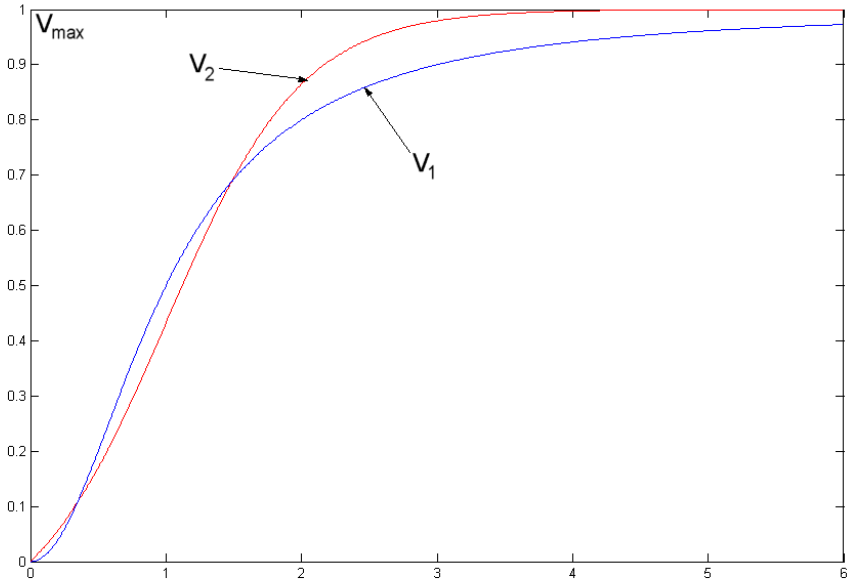
i) $V(x)$ ist positiv und monoton wachsend

ii) $V(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} V(x) = V_{max}$ (Maximalgeschwindigkeit)

iii) $V''(x) > 0$ für $x < b$ und
$V''(x) < 0$ für $x > b$, wobei b eine Konstante ist.

Beispiele:

$$V_1(x) = V_{max}\frac{x^2}{1+x^2}$$
$$V_2(x) = V_{max}\frac{tanh(L(x-1)) + tanh(L)}{1 + tanh(L)}$$



Nun wollen wir in folgendem Satz die Lösbarkeit des Systems untersuchen und auf die eindeutige konstante Geschwindigkeit des Kreisverkehrs zu sprechen kommen:

Satz:
Es gibt eine eindeutige Lösung des Systems mit einer konstanten Geschwindigkeit c für alle Autos.

Beweis:

$$d_j = x_{j+1} - x_j, \qquad \sum_{i=1}^{N} d_j = L$$

Eine Lösung $x_j^*(t), \quad j = 1, \ldots, N$ mit konstanter Geschwindigkeit ζ existiert

$$\Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_N \end{pmatrix} : V_j(d_j) = \zeta$$

V_j sind streng monoton steigend und nach oben beschränkt,

also existieren für alle $\zeta \in \left(0,\ c^* := \min_{j=1,\ldots,N} \left(\sup_{x \in \mathbb{R}_+} V_j(x) \right)\right)$ derartige $d_j(\zeta)$, so dass

$$V_j(d_j) = \zeta, \qquad \forall j$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} d_j(\zeta) = L$$

und die Lösung des DGL-Systems ist

$$x_j^*(t) = b_j + ct, \qquad j = 1, \ldots, N$$

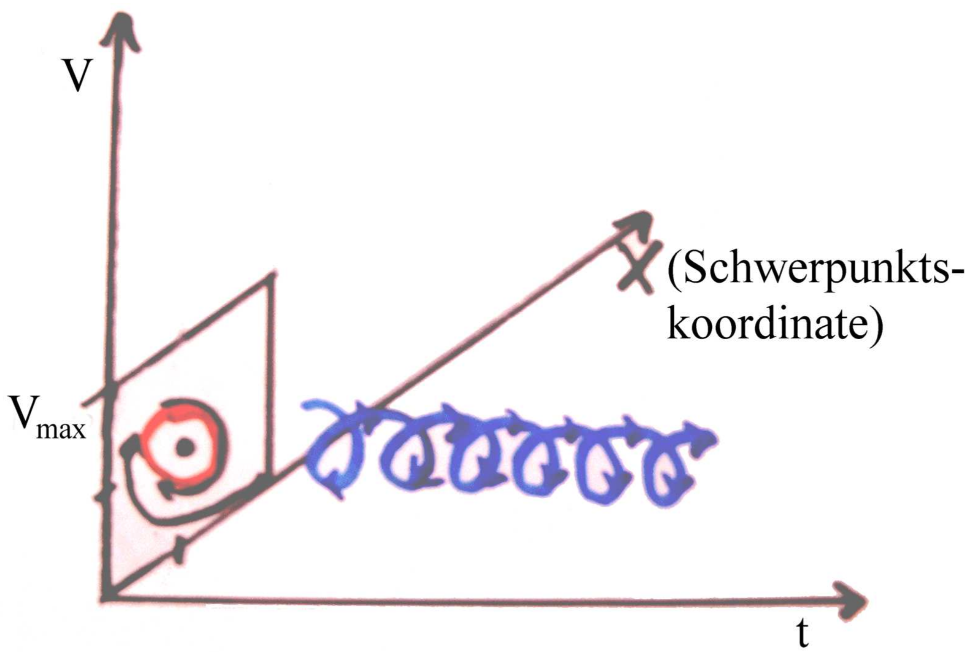
$$b_j = x_1^*(0) + \sum_{k=1}^{j-1} d_k(c), \qquad b_1 = 0$$

Bemerkungen:
Durch $b_1 = 0$ hat man die Eindeutigkeit der Lösung erhalten.
c hängt von den Parametern L und N ab.

Vereinfachung der Gleichung:
Anhand der berechneten optimalen Koordinate x_j^* und optimalen Geschwindigkeit c, die zur konstanten Lösung führen, wollen wir Gleichgewichtskoordinaten einführen. Das Gleichgewicht ist in unserem Fall die optimale Position mit der optimalen Geschwindigkeit. In diesem Fall befinden wir uns in dem Kreisverkehr, der sich mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt. In einem beliebigen System hat ein Auto also eine relative Position zu der optimalen Position x_j^* und eine relative Geschwindigkeit zu der optimalen Geschwindigkeit c.
Das System hat dann folgende Gestalt:

$$\begin{cases} x_j(t) = x_j^* + X_j(t) \\ y_j(t) = c + Y_j(t) \end{cases}, \qquad j = 1, \dots, N$$

hierbei sind also $X_j(t)$ und $Y_j(t)$ die relativen Koordinaten. Im Falle $X_j(t) \neq 0, \quad Y_j(t) \neq 0$ würde ein Auto beispielweise eine gewisse Zeit lang beschleunigen, da es genügend Platz zum Vordermann hat, bremst dann wieder ab, weil das vorausfahrende Auto immer näher kommt und kann nach der Beschleunigung des Vordermanns ebenfalls wieder Gas geben. Im folgenden Phasendiagramm gehen wir von einer zusätzlichen periodischen Lösung des Systems aus und betrachten die Positionsverschiebung der realitiven Koordinate nach der Zeit t:



Das neue DGL-System ist also:

$$\begin{cases} \dot{X}_j = Y_j \\ \dot{Y}_j = \frac{1}{\tau_j}[V_j(d_j(c) + X_{j+1} - X_j) - c - Y_j] \end{cases}, \qquad j = 1, \dots, N$$

Eine weitere Vereinfachung erhalten wir durch

$$W := (X, Y)$$
$$\Rightarrow \quad \dot{W} = F(W)$$

Eine Linearisierung um den Gleichgewichtspunkt $W = 0$ (der Fixpunkt mit der konstanten Lösung) bringt uns:

$$\dot{W} = MW \qquad \text{mit } M = \left(\begin{array}{c|c} 0_N & I_N \\ \hline D_N(\bar{\beta}) & -C_N \end{array}\right)$$

wobei 0_N die $N \times N$-Nullmatrix, I_N die $N \times N$-Einheitsmatrix ist und

$$D_N(\bar{\beta}) = \begin{pmatrix} -\bar{\beta}_1 & \bar{\beta}_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\bar{\beta}_2 & \bar{\beta}_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\bar{\beta}_{N-1} & \bar{\beta}_{N-1} \\ \bar{\beta}_N & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\bar{\beta}_N \end{pmatrix}$$

$$\bar{\beta}_j = \tfrac{1}{\tau_j} V_j'(d_j), \qquad j = 1, \dots, N$$

$$C_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\tau_N} \end{pmatrix}$$

gilt.

Eigenwertuntersuchung:
Von besonderer Bedeutung sind in unserem Modell die Eigenwerte von M, da sie Aussagen über Stabilität und Instabilität machen. (siehe auch Vorlesungsskript der Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ von Prof. Roland Gunesch (Sommersemesters 2006); Kap. 3.5.1 (S. 65) und Kap. 6.1.4 (S.102))
Die Eigenwerte ergeben sich aus der Gleichung

$$\det(M - \lambda I) = \prod_{j=1}^{N} \left[\lambda(\lambda + \tfrac{1}{\tau_j}) + \bar{\beta}_j\right] - \prod_{j=1}^{N} \beta_j = 0$$
$$\text{setze } \beta_j = \tau_j \bar{\beta}_j = V_j'(d_j), \qquad \forall j$$
$$\Leftrightarrow \prod_{j=1}^{N} (\tau_j \lambda^2 + \lambda + \beta_j) - \prod_{j=1}^{N} \beta_j = 0$$

Diese Gleichung kann man zwar lösen, für ein Verständnis dieser Gleichung und den daraus resultierenden Ergebnissen ist sie jedoch zu unübersichtlich.

Vereinfachung: (Fahrer mit identischen Gesetzen)
Wir geben die individuelle Betrachtung der Fahrer auf und lassen jedes Auto nach denselben Fahrgesetzen fahren. D.h. wir vereinheitlichen sowohl die Reaktionszeiten τ_j als auch

die Geschwindigkeitsfunktionen $V_j(x)$:

$$\begin{array}{lc} & \tau_j = 1, \quad V_j(x) = V(x) \qquad \forall j \\ \Rightarrow & d_1 = \cdots = d_N = \frac{L}{N} \\ & c = V(\frac{L}{N}) \\ \rightsquigarrow & \left\{ \begin{array}{c} \dot{X}_j = Y_j \\ \dot{Y}_j = V(\frac{L}{N} + X_{j+1} - X_j) - V(\frac{L}{N}) - Y_j \end{array} \right. \qquad j = 1, \ldots, N \end{array}$$

Hieraus ergibt sich eine wesentlich einfachere Eigenwertgleichung:

$$(\lambda^2 + \lambda + \beta)^N - \beta^N = 0$$
$$\beta = V'(\frac{L}{N})$$

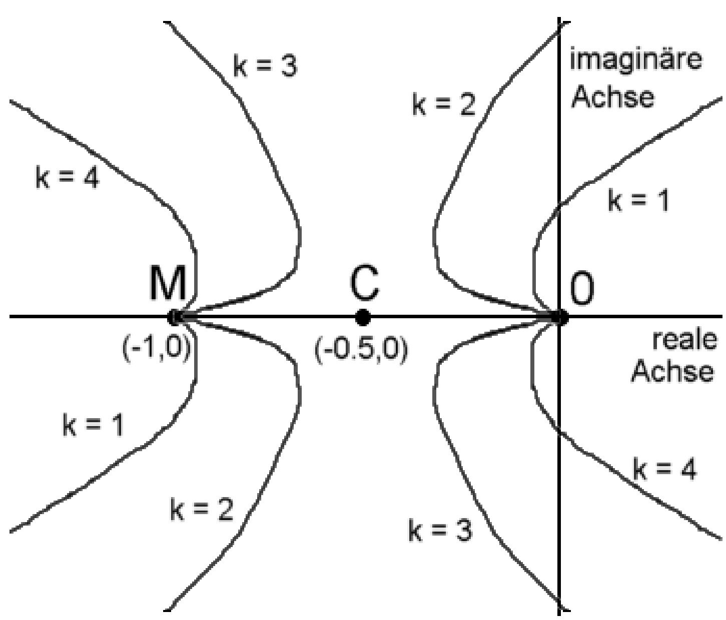
Die Stabilitätsuntersuchung nehmen wir also in Abhängigkeit der Parameter L und N bzw. $\frac{N}{L}$ (Dichte der Autos) vor. Wir müssen hierbei ein besonderes Augenmerk auf die komplexwertigen Eigenwerte richten, da diese für die interessanteren Lösungen (periodische Orbits) zuständig sind:

$$(\lambda^2 + \lambda + \beta)^N - \beta^N = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + \lambda + \beta(1 - e^{ik\frac{2\pi}{N}}) = 0 \qquad k \in \{1, \ldots, N\}$$
$$\lambda = \mu + i\omega$$

folgendes Gleichungssystem löst die Gleichung für die Eigenwerte:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu^2 - \omega^2 + \mu = \beta(c_k - 1) & c_k = \cos(\frac{2\pi k}{N}) \\ \omega(2\mu + 1) = \beta(s_k) & s_k = \sin(\frac{2\pi k}{N}) \end{array} \right. , \qquad j = 1, \ldots, N$$

Beispiel: 5 Autos
Die Eigenwerte für dieses Beispiel sind in folgendem Diagramm eingezeichnet:



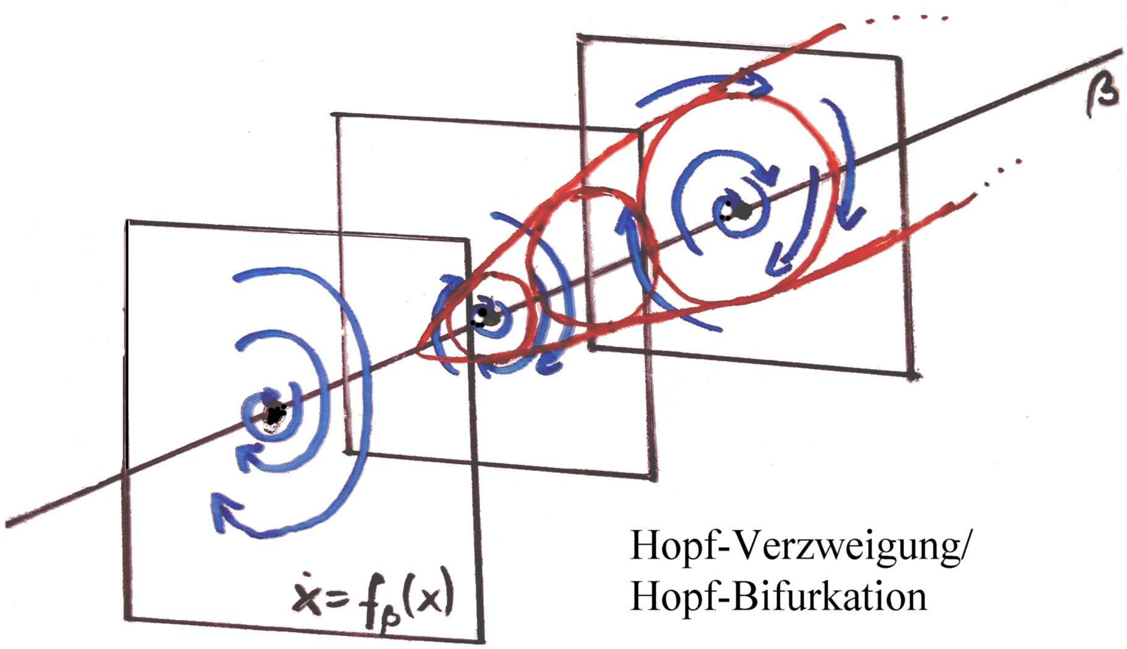
Im speziellen Fall $\beta = V'(\frac{L}{N}) = 0$ erhalten wir die uns bekannte Lösung $V(\frac{L}{N}) = c$. Hier sind N Eigenwerte im Ursprung und N im Punkt $(-1, 0)$, d.h. diese Lösung ist **stabil**. Für hinreichend kleine $\beta > 0$ haben wir keine positiven Realteile und deswegen **asymptotische Stabilität**. Ab einem gewissen β erhalten wir jedoch auch positive Realteile, die zur Instabilität führen. Nämlich bei:

$$\beta = \beta_k = \frac{1 - c_k}{s_k} = \frac{1}{1 + c_k}$$

Dies geschieht als erstes bei $k = 1$ und bei $k = N - 1$. (Einsetzen von k in die Gleichung für c_k). Wir können uns also auf β_1 beschränken, so dass wir die kritische(n) Längen L_H aus der Gleichung

$$V'\left(\frac{L_H}{N}\right) = \beta_1$$

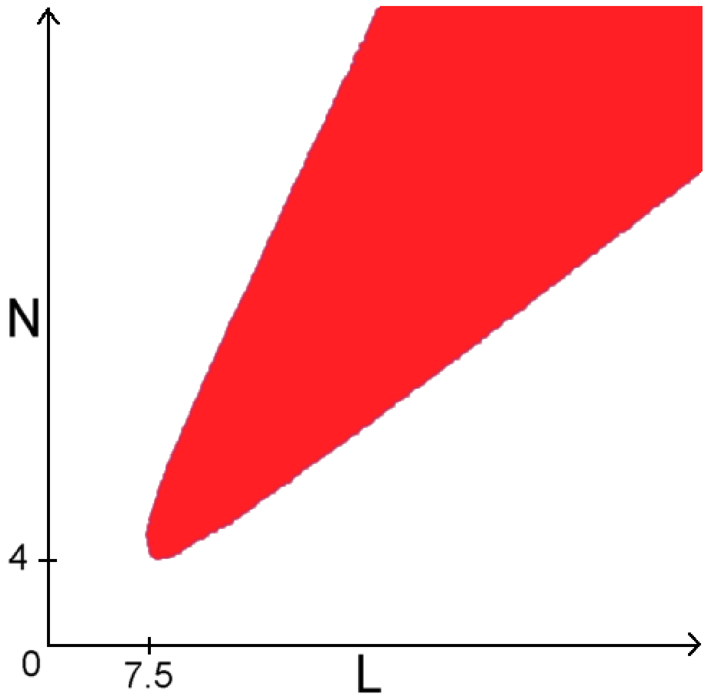
für eine feste Anzahl an Autos erhalten. Für jede dieser errechneten Längen erhalten wir eine sogenannte Bifurkations-Verzweigung/ Hopf-Verzweigung, siehe folgende Skizze:



Hopf-Verzweigung/
Hopf-Bifurkation

Eine Einleitung in dieses Gebiet findet man im Skript von Prof. Gunesch (Kap. 6.5.2). Die ausführliche Theorie ist nachzulesen in „Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields“ (Guckenheimer & Holmes).

Eine genauere Untersuchung des Verhältnisses der Parameter L und N zueinander liefert uns das folgende Instabilitätsdiagramm:



2 Makroskopisches System

In diesem Modell betrachten wir den Verkehrfluss an verschiedenen Orten und untersuchen die Entwicklung nach Zeit und Raum. In der Literatur untersucht man dieses Problem oft durch die sogenannte „Transportgleichung“ oder „hyperbolische Gleichung“, die wie folgt aussieht:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial x} = 0$$

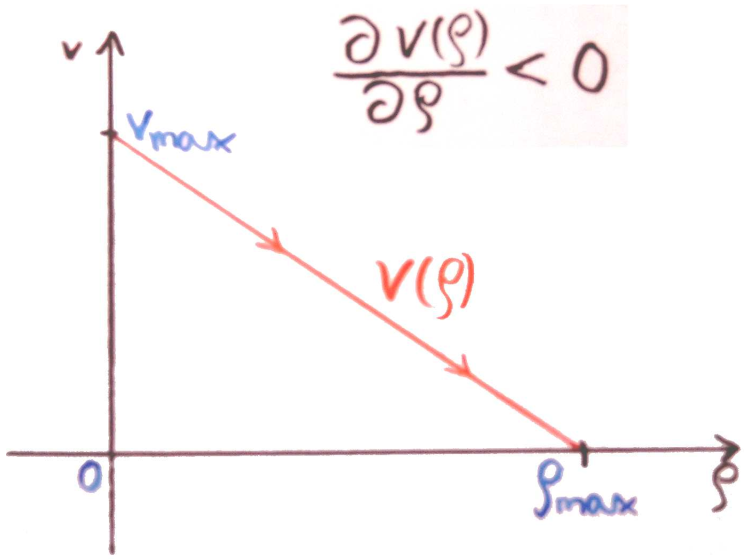
Hierbei entspricht

- $\rho(x,t)$ der Dichte an Autos bei x nach t Zeiteinheiten und
- $v(x,t)$ der Durchschnittsgeschwindigkeit der Autos bei x nach t Zeiteinheiten

Zusätzlich stellen wir die folgende Bedingung an die Geschwindigkeitsfunktion:

$$\frac{\partial v(\rho)}{\partial \rho} < 0$$

Die Gleichung drückt aus, dass bei zunehmender Dichte die Geschwindigkeit des Flusses abnimmt, siehe folgende Skizze:



Herleitung und Bedeutung der Transportgleichung:
Für die Herleitung definieren wir zusätzlich folgende Funktionen:

- $N(x_1, x_2, t)$: Anzahl der Autos zwischen x_1 und x_2 zum Zeitpunkt t
- $f(x,t)$: Anzahl der Autos, die x nach t Zeiteinheiten passieren

Es gilt damit:

$$f(x_1, t) = v(x_1, t) \cdot \rho(x_1, t)$$

$$\star \begin{cases} \frac{\partial N}{\partial t}(x_1, x_2, t) &= \lim_{\epsilon \to 0} f(x_1, t+\epsilon) - f(x_2, t+\epsilon) \\ N(x_1, x_2, t) &= \int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dx \end{cases}$$

Wir lassen wegen der Übersichtlichkeit nun den Grenzübergang $\lim_{\epsilon \to 0}$ weg und setzen Differenzierbarkeit von $\rho(x,t)$ und $v(x,t)$ voraus. Somit ergibt sich aus den obigen Gleichungen:

$$\star \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)dx = \rho(x_1, t) \cdot v(x_1, t) - \rho(x_2, t) \cdot v(x_2, t)$$

$$\Rightarrow \rho(x_1, t) \cdot v(x_1, t) - \rho(x_2, t) \cdot v(x_2, t) = -\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial x} dx$$

und damit

$$N = \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t)dtdx = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho \cdot v}{\partial x}(x,t)dxdt$$

$$\Leftrightarrow \int\limits_{x_1}^{x_2} \int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial x}(x,t) \right] dtdx = 0$$

Aus dieser Umformung erkennen wir die gegebene Form der Transportgleichung wieder:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v)}{\partial x} = 0$$

Eine sinnbildliche Erklärung dieser Gleichung könnte lauten: „Je niedriger die Dichte wird, desto mehr Autos können einen Punkt passieren.“

Ein einfaches Modell der Geschwindigkeitsfunktion ist folgende Gleichung:

$$v = v_{max}\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)$$

wobei v_{max} die Maximalgeschwindigkeit des Verkehrsflusses ist (z.B 120 km/h auf einer Autobahn) und ρ_{max} die absolute Maximale Dichte an Autos (z.b. 200 Autos auf einem Kilometer = 2 Autos auf 10 Metern).

Wir erhalten für dieses Beispiel die Gleichung

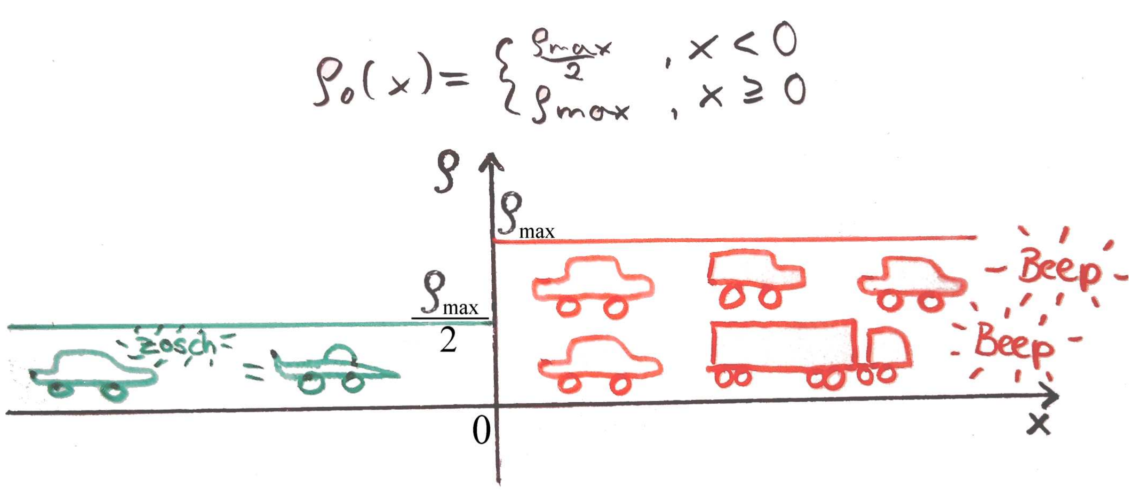
$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(f(\rho))}{\partial x} = 0 \\ f(\rho) = \rho \cdot v_{max}(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}) \end{cases}$$

Anwendungsbeispiel: Stau-Entwicklung/ Stau-Auflösung
Wir untersuchen zuletzt noch ein simples Problem, das der Stauentwicklung bzw. das symmetrische Problem der Stauauflösung. Man könnte also für eine gestaute Zone die Auflösung am Anfang des Staus dem hinzukommenden Stau am Ende des gestauten Bereiches gegenüberstellen um zu bestimmen, wann sich der Stau auflösen wird.

v sei wie oben mit den Anfangswerten

$$\rho(x, t = 0) = \rho_0(x) = \begin{cases} \frac{\rho_{max}}{2}, & x < 0 \\ \rho_{max}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Diese Startbedingung verdeutlicht folgende Skizze bildlich:



Im folgenden gebe $\zeta(t)$ die Stauposition zum Zeitpunkt t an.

$$\zeta'(t) = \frac{f(\rho_l) - f(\rho_r)}{\rho_l - \rho_r} = \frac{\frac{1}{2}\rho_{max} \cdot v_{max}(1 - \frac{1}{2}) - 0}{-\frac{\rho_{max}}{2}} = -\frac{1}{2}v_{max}$$

$$\Rightarrow \zeta(t) = -\frac{1}{2}v_{max} \cdot t(+t_0 = 0)$$

$$\Rightarrow \rho(x,t) = \begin{cases} \frac{\rho_{max}}{2}, & x < -\frac{v_{max}}{2}t \\ \rho_{max}, & x \geq -\frac{v_{max}}{2}t \end{cases}$$

Der Stau breitet sich somit mit einer Geschwindigkeit von $\frac{v_{max}}{2}$ aus. Für das symmetrische Problem der Stau-Auflösung erhalten wir entsprechend eine vertauschte Dichte für $t = 0$. Die Stauauflösung entwickelt sich nach diesem Modell also analog zu obigem Beispiel.

Literaturangaben:

- I.Gasser, G.Sirito, B.Werner: „Bifurcation of a class of 'car following' traffic models“ (Dezember 2003)
- Prof. Roland Gunesch: Skript „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ (Sommersemester 2006)
- Guckenheimer & Holmes: „Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields“