Theoretische Orbits und galaktische Modelle
Das Bewegungsintegral

Svenja Heydorn

19. Januar 2007

Einführung und Begriffe

Im folgenden Vortrag möchte ich mich mit Bewegungsintegralen und deren Herleitung befassen. Dazu werde ich einige vielleicht unbekannte Begriffe benutzen, die ich hier erläutere:
Ein System heißt integrabel, wenn es lösbar ist durch Variablen in der Zeitfunktion.
Die Theorie des dritten Integrals geht auf die Arbeiten von Birkhoff (1927) und Whittacker (1916, 1937) zurück.
Ist ein System nahe an einem intgrablen System, so können wir Störungsmethoden benutzen um Integrale zu finden, die über lange Zeiträume, manchmal für alle Zeiten, gültig sind. Integrale für die Hamilton-Gleichung wurden erst von Whitacker entdeckt. Betrachten wir den Fall einer achsensymmetrischen Galaxie, so heißen solche Integrale "drittes Integral".
Oft werden wir mit dem Potential rechnen. Das Potential ist eine mathematische Größe, mit deren Hilfe sich physikalische Felder beschreiben lassen. In einfachen Feldern (z.B. Gravitationsfeld) ergibt sich das Potential als Quotient aus der potentiellen Energie eines Probekörpers und dessen Masse bzw. Ladung.
Zunächst wollen wir das dritte Integral in der meridianen Ebene betrachten. Die meridiane Ebene eines Punktes ist die Vertikalebene des mathematischen Horizonts, die durch die Lotrichtung und die Parallele zur Erdachse durch den Punkt aufgespannt wird.
Im folgenden werden wir viel an der Hamiltonformel verändern, sollten aber immer vor Augen haben, dass die Hamilton-Formel eigentlich von drei Variablen abhängt: $H(x, y, t)$. Wir betrachten in diesem Vortrag aber den Fall einer achsensymmetrischen Galaxie und können deshalb die letzte Variable weglassen: $H(x, y)$.

Die vorkommenden Funktionen und Variablen

Im folgenden werden uns unbekannte Funktionen und Variablen vorkommen, die ich hier kutz vorstellen möchte:
ω sind immer Frequenzen, φ, ψ sind Winkelfunktionen, r, z zylindrische Koordinaten, J_0 der Drehimpuls. O wird im folgenden der Orbit sein und O_1, O_2 die instabilen Punkte, nahe dem Chaos. Chaos ist eine Konsequenz aus der Interaktion der Resonanzen.
$L_i, i = 1 - 5$ sind die Lagrange-Punkte, die Punkte des Gleichgewichts.

Das dritte Integral in der meridianen Ebene

Zunächst wollen wir das dritte Integral in der meridianen Ebene finden.
Betrachten wir dazu eine zur z-Achse achsensymmetrische Galaxie mit dem Potential $V(r, z)$ (welches nur Kräfte von z^2 beinhalted).
In der symmetrischen Ebene sind die ungeraden Ableitungen Null. In diesem Fall wird der Drehimpuls J_0 auf der z-Achse konserviert und wir können die

Hamiltonsche Formel wie folgt schreiben:

$$H = \frac{1}{2} * (\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + V(r,z) + \frac{J_0^2}{2r^2}, \ \textit{(1)}$$

r, z zylindrische Koordinaten.
Mit einem zirkulierenden Orbit z_0 in einer symmetrischen Ebene haben wir eine Gleichung mit Drehimpuls J_0:

$$\frac{\partial V(r,0)}{\partial r} = -\frac{J_0^2}{r^3} \ \textit{(2)}$$

Betrachtet man den letzten Ausdruck aus der Hamiltonschen Formel um die Koordinate $(r_0, 0)$, dann erhält man:

$$H = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{z}^2 + V(r_0,0) + \frac{J_0^2}{2r_0^2} + \frac{1}{2}(\omega_1^2\xi^2 + \omega_2^2 z^2) - \varepsilon\xi z^2 - \frac{\varepsilon'}{3}\xi^3 + ... \ \textit{(3)}$$

mit

$$\textit{(4)}$$

$$\xi = r - r_0$$

$$\omega_1^2 = (\frac{\partial^2 V}{\partial r^2})_0 + \frac{3J_0^2}{r_0^4},$$

$$\omega_2^2 = (\frac{\partial^2 V(r,z)}{\partial z^2})_0,$$

$$\varepsilon = -(\frac{\partial^3 V}{\partial r \partial z^2})_0,$$

$$\varepsilon' = (\frac{\partial^3 V}{\partial r^3})_0 - \frac{12J_0^2}{r_0^5}.$$

Betracheten wir die Hamilton-Gleichung ohne die konstanten Terme und ersetzen ξ bzw. z durch x bzw. y, so erhalten wir die Hamilton-Gleichung

$$H = \frac{1}{2}(\dot{\times}^2 + \dot{y}^2 + \omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2) - \varepsilon x y^2 - \frac{\varepsilon'}{3}x^3 \ \textit{(5)}$$

(Spezialfälle: $\varepsilon' = 0$: Barbanis-Hamiltonsche Gleichung der Chemie und $\omega_1 = \omega_2 = 1, \varepsilon = -\varepsilon'$: Hénon-Heiles-Hamiltonsche Gleichung.
Die Hamiltonsche Gleichung war die Erste, für die ein drittes Integral konstruiert wurde (Contopolous 1960). Eine der ersten Abbildungen war die Erklärung von verwirbelten Elipsoiden der Sterne nahe der Sonne.)

Betrachtet man eine achsensymmetrischen Galaxie mit nur zwei Bewegungsintegralen, der Energie I_1 und dem Drehimpuls entlang der z-Achse, I_2, dann wird die Verteilung der Sternverwirbelungen durch die Funktion $f = f(I_1, I_2)$ dargestellt. Hierbei ist

$$I_1 = \frac{1}{2}(R^2 + \Theta^2 + Z^2) + V(r,z) \ \textit{und} \ I_2 = r\Theta, \ \textit{(6)}$$

wobei R, Θ, Z die (radialen (entlang der z-Achse), azimutialen (entlang der x-Achse) und vertikalen) Komponenten der Verwirbelung sind.
Die verbreitetste Kombination von I_1 und I_2 die quadratisch ist, ist folgende:

$$I = I_1 - \lambda I_2 + \frac{\mu}{2} I_2^2 = \frac{1}{2}[R^2 + (1 + \mu r^2)(\Theta - \Theta_0)^2 + Z^2] + ... \text{ (7)}$$

mit

$$\Theta_0 = \frac{\lambda r}{(1 + \mu r^2)} \text{ (8)}$$

Der verwirbelte Elipsoid f=const. kann unterschiedliche Achsen entlang der R-Richtung und der Θ-Richtung haben, aber die Z-Achse ist identisch mit der R-Achse. Aus Beobachtungen wissen wir, das die Z-Achse des verwirbelten Ellipsoids nahe der Sonne sehr viel kürzer ist, als die R-Achse.
Das kann erklärt werden, indem wir uns ein drittes Bewegungsintegral anschauen,

$$I_3 = \frac{1}{2} Z^2 + ... \text{ (9)}$$

In diesem Fall können wir einen triachsialen vewirbelten Ellipsoiden konstruieren, indem wir $f = f(I + \nu I_3)$ setzen.
(Das wurde von Barbanis (1962) gemacht, der einen passenden Wert für die Konstante ν, um das Elipsod an die (R,Z)-Ebene anzupassen.)

Das dritte Integral in Spiralgalaxien und Stangengalaxien

Um Bewegungsintegrale in Spiral- oder Stangengalaxien zu finden, benutzt man am Besten die Theorie der epizyklischen Orbits, um die Hamilton-Formel auszudrücken:
$H = H(I, \Theta)$, mit $I = (I_1, I_2)$ und $\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$.
Wir unterscheiden zwei Fälle, den nicht-resonanten Fall und den resonanten Fall.
Der resonante Fall tritt auf, wenn zwei Basisfrequenzen ω_1, ω_2 der achsensymmetrischen Galaxie einen rationalen Quotienten haben:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}, \text{ (1)}$$

ω_1 =epizyklische Frequenz und ω_2 =Geschwindigkeit im rotierenden Rahmen $= \Omega - \Omega_s$, wobei Ω die Geschwindigkeit im Zentrum und Ω_s die Winkelgeschwindigkeit ist.
Die wichtigsten Fälle von Resonanz sind die sogenannte Lindblad-Resonanzen (Innere und äussere Lindblad-Resonanz, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2}{1}$ bzw. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{-2}{1}$) und die Partikel-Resonanz (Korotation) ($\omega_2 = 2$). Wir erhalten eine Hamilton-Formel (durch Umformungen von H aus der Theorie der epizyklischen Orbits) der Form

$$H = H_0(r) + V_1 = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + a I_1^2 + 2b I_1 I_2 + c I_2^2 + ... + V_1 \text{ (2)}$$

wobei

$$H_0 = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + a I_1^2 + 2b I_1 I_2 + c I_2^2 + ...$$

achsensymmetrische Hintergrund und V_1 eine spirale oder starre Störung der Form

$$V_1 = ReA(r)exp[i(\phi(r) - 2\Theta] \quad (3)$$
$$= Re\sum_{n,m} V_{n,m}(I_1, I_2)exp[i(m\Theta_1 - n\Theta_2)]$$

Die Spirale findet sich hier in der Form $\phi(r) - 2\Theta = const.$ wieder, wobei Θ die horizontale Richtung im rotierenden Rahmen mit Geschwindigkeit Ω_s ist. Die Wellenlänge ist $k = \phi'(r)$.

Ist $k < 0$, so ist die Spirale schleppend, d.h. r wird kleiner, wenn Θ größer wird, ist $k > 0$, so wird r kleiner, wenn Θ kleiner wird. Ist $k = 0$, so haben wir eine Stange.

Um V_1 in wirkungswinkel-Variablen auszudrücken, betrachten wir $\phi(r)$ und $A(r)$ um den Punkt r_c:

$$\phi(r) = \phi_c + k_c(r - r_c) + ...$$
$$A(r) = A_c + A_c'(r - r_c) + ..., \quad (4)$$

wobei

$$r - r_c = r - r_0 + \Delta r_0 = (\frac{2I_1}{\omega_1})^{\frac{1}{2}} cos\Theta_1(1 + O_2) + O_2 \quad (5)$$

Für die Spirale bekommen wir durch einiges Einsetzen

$$\phi - 2\Theta = \phi_c - 2\Theta_2 + I_1 d_1 + I_2 d_2 + (\frac{2I_1}{\omega_1})^{\frac{1}{2}} k_c cos\Theta_1 + (\frac{2I_1}{\omega_1})^{\frac{1}{2}} \frac{4\Omega_c}{r_c\omega_c} sin\theta_1 + O_2, \quad (6)$$

wobei d_1, d_2 Konstanten von $O(k_c)$ sind. Ein gleicher Ausdruck lässt sich auch für A finden.
Nach einigen Umformungen finden wir die folgenden wichtigen Terme in V_1, welchen wir bzgl. $(m\Theta_1 - n\Theta_2)$ betrachten:

1. $m = 0$

$$cos(\Phi_c - 2\Theta_2)[A_c + O_2] - sin(\Phi_c - 2\Theta_2)O_2 = \varepsilon_0 cos(\Phi_c - 2\Theta_2 + q_0) \quad (7)$$

wobei $\varepsilon_0 cosq_0 = A_c + O_2$ und $\varepsilon_0 sinq_0 = O_2$
Also $\varepsilon_0 = A_c + O_2$ und $q_0 = O_2$

2. $m = \pm 1$ (Innere und äussere Lindblad-Resonanz)

$$(\frac{2I_1}{\omega_1})^{\frac{1}{2}}\{cos(\Phi_c - 2\Theta_2)[(A_c' + O_2)cos\Theta_1 + O_2 sin\Theta_1] - sin(\Phi_c - 2\Theta_2)$$
$$*[(A_c k_c + O_2)cos\Theta_1 + (\frac{4\Omega_c}{r_c\omega_c}A_c + O_2)sin\Theta_1]\} \quad (8)$$
$$= (\frac{2I_1}{\omega_1})^{\frac{1}{2}}[\varepsilon_+ cos(\Theta_1 + \Phi_c - 2\Theta_2 + q_+) + \varepsilon_- cos(-\Theta_1 + \Phi_c - 2\Theta_2 + q_-)]$$

wobei

$$2\varepsilon_\pm cosq_\pm = A_c' \pm \frac{4\Omega_c}{r_c\omega_1}A_c + O_2, \; 2\varepsilon_\pm sinq_\pm = A_c k_c + O_2 \quad (9)$$

mit $\varepsilon_\pm > 0$.
Man nimmt an, dass die Gleichungen von gleicher Ordnung sind, wie die Größen an sich, um die Ordnungen zu bestimmen.
Die Terme mit $m = \pm 2$ sind von der Ordnung O_2 (d.h. in $I_i^{\frac{1}{2}}$ sind sie von zweiter Ordnung), die Terme mit $m = \pm 3$ sind von Ordnung O_3 usw.
Die wichtigsten Terme sind die, in denen $m = 0$ oder $m = \pm 1$. Dann können wir schreiben

$$V_1 = \varepsilon_0 cos2 \bar{\Theta}_2 - (\frac{2I_1}{\omega_1})^{\frac{1}{2}} [\varepsilon_+ cos(\Theta_1 - 2\Theta_{2+}) + \varepsilon_- cos(\Theta_1 - 2\Theta_2)] \text{ (10)}$$

wobei

$$\bar{\Theta}_2 = \Theta_2 - \frac{\Phi_c}{2} + O_2 \text{ (11)}$$

und

$$\Theta_{2\pm} = \Theta_2 - \frac{1}{2}(\Phi_c + q_\pm + \pi) \text{ (12)}$$

Die Grössen $\varepsilon_0, \varepsilon_\pm$ sind von der Ordnung A, wobei A ein zweiter kleiner Parameter unabhängig von $I_i^{\frac{1}{2}}$ ist.

Entfernen wir uns von den Resonanzen, so können wir kanonische Transformationen der Variablen vornehmen, so dass wir die Terme von V_1 in der Hamilton-Gleichung löschen können. Zum Bsp. kann der Term

$$-\varepsilon_+ (\frac{2I_1}{\omega_1})^{\frac{1}{2}} cos(\Theta_1 - 2\Theta_{2+}) \text{ (13)}$$

eliminert werden, wenn wir nur die kanonischen Variablen (Θ_i, I_i) mit $i = 1, 2$ tauschen durch neue kanonische Variablen (Θ_i^*, I_i^*), welche mit den alten Variablen in folgender Beziehung stehen
(14)

$$I_i = \frac{\partial S}{\partial \Theta_i}, \ \Theta_i^* = \frac{\partial S}{\partial I_i^*}$$

wobei S einen generierende Funktion ist.
(15)

$$S = \Theta_1 I_1^* + \Theta_2 I_2^* + S_1 + ...$$

Die Terme S_1 und höhere Terme in ε_+ werden Schritt für Schritt ermittelt. Diese Methode nennt man die "von Zeipel-Methode der Himmelsmechanik"(Lehre der Bewegung der Himmelskörper), in der man die Hamilton-Gleichung in eine Normalform, also eine Funktion der Wirkungsvariablen, bringt.
Im Einzelnen betrachtet man den Fall $\omega_1 \neq \omega_2$:
(16)

$$S_1 = \varepsilon_+ (\frac{2I_1^*}{\omega_1})^{\frac{1}{2}} \frac{cos(\Theta_1 - 2\Theta_{2+})}{\omega_1 - 2\omega_2}$$

wobei die neuen Variablen abgeleitet sind von
(17)

$$I_1 = I_1^* + S_1, \ und I_2 = I_2^* - 2S_1$$

Setzen wir diese Werte nun in die Hamilton-Gleichung (3) ein, mit V_1 aus (10), so löschen wir den Term $-\varepsilon_+ (\frac{2I_1}{\omega_1})^{\frac{1}{2}} cos(\Theta_1 - 2\Theta_2)$ aus H. Analog löscht man die

anderen trigonometrischen Terme.
Nahe der inneren Lindblad-Resonanz ist $\omega_1 - 2\omega_2$ sehr klein. Dann heißt der Winkel $\psi_1 = \Theta_1 - 2\Theta_{2+}$ eine langsame Variable wegen seiner Ordnung $(\omega_1 - \omega_2)t$. Terme, die diesen Winkel benutzen heißen lang-periodische Terme. In diesen Termen von I_i zu gegebenem I_i^* sind groß, also sind I_i die approximativen Integrale. Dadurch kann man die lang-periodischen Terme nicht eliminieren, was ein bekanntes Problem in der Himmelsmechanik darstellt.
Aber wir können eine Transformation wie schon vorher in (14) machen um die kurz-periodischen Terme (also alle Terme, die nicht von $\Theta_1 - 2\Theta_{2+}$ beinflusst werden) zu eliminieren. Dann sind die einzigen trigonometrischen Terme der Hamilton-Gleichung die, die $\psi_1 = \Theta_1^* - 2\Theta_{2+}^*$ beinhalten. Die Hamilton-Gleichung sieht nun so aus:
(18)

$$\begin{aligned}\overline{H} &= H - h \\ &= \omega_1 I_1^* + \omega_2 I_2^* + aI_1^{*2} + 2I_1^* I_2^* + cI_2^{*2} - \varepsilon_+ (\frac{2I_1^*}{\omega_1})^{\frac{1}{2}} \\ &= 0,\end{aligned}$$

wobei h die Energie des Orbits ist. Man nennt $\overline{H}$ die resonante Form der Hamilton-Gleichung. Diese ist von Nutzen, wenn man sich die Umgebung der inneren Lindblad-Resonanz anschaut.
Diese resonante Form wollen wir uns weiter vereinfachen. Dazu verwenden wir wieder die kanonischen Transformationen der Variablen:
(19)

$$J_1 = I_1^*, J_2 = I_2^* + 2I_1^*, \psi_1 = \Theta_1^* - 2\Theta_{2+}^*, \psi_2 = \Theta_{2+}^*$$

und die Hamilton-Gleichung ist
(20)

$$\overline{H} = \omega_2 J_2 + \gamma J_1 + \alpha J_1^2 + 2\beta J_1 J_2 + cJ_2^2 - \varepsilon_{+0}(\frac{2J_1}{\omega_1})^{\frac{1}{2}} = 0,$$

wobei $\gamma = \omega_1 - 2\omega_2$ und $\alpha = a - 4b + 4c$, $\beta = b - 2c$. Mit (12) haben wir:
(22)

$$\varepsilon_{+0} = \frac{1}{2}[A_c^2 k_c^2 + (A_c' + \frac{4\Omega_c}{r_c \omega_1})^2]^{\frac{1}{2}} > 0$$

Also ist γ ein Wert für den Abstand zur Resonanz. Innerhalb der inneren Lindblad-Resonanz ist er negativ, ausserhalb positiv.
Die resonante Hamilton-Gleichung aus (10) ist integrabel und wir können dafür schreiben
(23)

$$\overline{H} = \omega_2 J_2 + cJ_2^2 + \varphi = 0$$

mit
(24)

$$\varphi = \gamma J_1 + \alpha J_1^2 + 2\beta J_1 J_2 - \varepsilon_{+0}(\frac{2J_1}{\omega_1})^{\frac{1}{2}} cos\psi_1$$

φ ist das neue Bewegungsintegral, es wird benuzt, wie ein 1-dimensionales Hamilton-System. Die Orbits in der Ebene (ψ_1, J_1) werden durch Gleichungen der Form $\varphi = const.$ angegeben.

Durch (23) haben wir
(25)

$$J_2 = -\frac{\varphi}{\omega_2}$$

und in der zwei kleinsten Ordnungen in ε und $J_1^{\frac{1}{2}}$ finden wir
(26)

$$J_2 = -\frac{\gamma J_1}{\omega_2} + \frac{\varepsilon_{+0}}{\omega_2}(\frac{2J_1}{\omega_1})^{\frac{1}{2}} cos\psi_1$$

Setzen wir diesen Wert in (24) ein und behalten nur Terme erster Ordnung in ε, so bekommen wir
(27)

$$\varphi = \gamma J_1 + \alpha_1 J_1^2 + \varepsilon_1(\frac{2J_1}{\omega_1})^{\frac{1}{2}}(J_{20} - 2J_1)cos\psi_1$$

mit

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{2\beta}{\omega_2}\gamma, \varepsilon_1 = \varepsilon_{+0}(-\frac{\beta}{\omega_2} + ...), J_{20} = -\frac{\varepsilon_{+0}}{\varepsilon_1}$$

Da φ ein formales Integral mit ist, hat es die selbe Form wie ein drittes Integral. Solche Integrale sind sehr nützlich, wenn man mit einer kleinen Störung rechnet. Dies ist ein realistisches Modell eines Spiralfeldes in unserer Galaxie.
Allerdings ist bekannt das die Resonanzen interagieren und die Bewegungen chaotisch werden, wenn die Amplitude der Störfelder unglaublich groß wird. In solch einem Fall kann man φ nicht verwenden, d.h. in der Realität existiert ein solches Integral nicht.

Integrale nahe der Korotation, $\Omega = \Omega_s$

Contopolous entdeckte 1973 eine Methode, um Bewegungsintegrale nahe der Korotation zu finden. Die Korotationsentfernung r_s wird durch die Gleichung $\Omega = (\frac{V_0'}{r})^{\frac{1}{2}}_s = \Omega_s$ definiert, wobei $V_0(r)$ das achsensymmetrsche Potential ist, $V_0' = \frac{dV_0}{dr}$. Das bedeutet, dass r_s der Radius von einem zirkulierenden Orbit ist, dessen Geschwindigkeit Ω gleich der Geschwindigkeit Ω_s der rotierenden Galaxis ist.
Nahe der Korotation ist das Jacobi-Integral
(1)

$$H \equiv \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\Omega_s^2 r^2 + V_0 + V_1 = h,$$

wobei h die konstante Energie eines Orbits ist (die Jacobi-Konstante) und
(2)

$$V_1 = ReA(r)exp[i(\phi(r) - 2\Theta]$$
$$= Re\sum_{n,m} V_{n,m}(I_1, I_2)exp[i(m\Theta_1 - n\Theta_2)].$$

Man kann den Ausdruck auch schreiben als
(3)

$$H = \frac{1}{2}v^2 + H' = h$$

mit
$$H' = -\frac{1}{2}M(r-r_s)^2 + \frac{1}{6}V_s'''(r-r_s)^3 + Acos(\phi - 2\Theta') + ...$$
mit $M = \Theta_s^2 - V_s'' = 4\Omega_s^2 - \omega_s^2$. H' ist ein effektives Potential und ω_s eine epizyklische Frequenz. Der Azimut $\Theta' = \Theta - \Omega_s t$ ist in einem Referenzraum abgeschätzt, der mit winkel-Geschwindigkeit Ω_s rotiert.
Im Falle eines homogenen Elipsoids ist M=0, im allgemeinen Fall, wo die Kraft langsamer als r wächst ist M positiv. Diesen Fall werden wir im folgenden betrachten:
Wenn wir $H'_x = H'_y = 0$ setzen, befinden wir uns im Gleichgewichtspunkt,
(4)
$$H'_x = -M(r-r_s)\frac{x}{r} - Asin(\phi - 2\Theta')(k\frac{x}{r} + \frac{2y}{r^2}) + A'cos(\phi - 2\Theta')\frac{x}{r} + O_2 = 0$$
und
$$H'_y = -M(r-r_s)\frac{y}{r} - Asin(\phi - 2\Theta')(k\frac{y}{r} + \frac{2x}{r^2}) + A'cos(\phi - 2\Theta')\frac{y}{r} + O_2 = 0$$
Wir lassen die Terme O_2 weg, die in A von zweiter Ordnung sind. Wenn wir die trviale Lösung $x = y = 0$ ausser Acht lassen (Zentrum der Galaxie L_3), bekommen wir $sin(\phi - 2\Theta') = 0$. Das bringt uns auf zwei Fälle:

1. Fall L_1, L_2 (instabil)
$$\phi - 2\Theta' = \pi \ oder \ 3\pi,$$
wo das Potential V_1 minimal ist, und

2. der Fall L_4, L_5 (stabil)
$$\phi - 2\Theta' = 0 \ oder \ 2\pi$$
, wo das Potential V_1 maximal ist.

Also haben wir für den ersten Fall L_1 bzw. L_2 das $r - r_s = -\frac{A'}{M}$ ist und für den zweiten Fall L_4 bzw. L_5 das $r - r_s = \frac{A'}{M}$ ist. In der kleinsten Annäherung können wir $r = r_s$ setzen.
Da $A' < 0$ ist in den äusseren Teilen der Galaxie, ist die Korrektur positiv im Minimum vom Potential V_1 (Punkte L_1 und L_2) und negativ im Maximum von V_1 (Pkte. L_4 und L_5). In allen Fällen sind die Gleichgewichtspunkte nur leicht vom Kreis $r = r_s$ entfernt.
Die Stabilität dieser Gleichgewichtspunkte ($x_s = r_s$ und $y = 0$) findet man, indem man nahe gelegene Orbits betrachtet. Setzt man $\xi = x - x_s$ und $\eta = y - y_s$ in den Bewegungsgleichungen
(5)
$$\ddot{x} - 2\Omega_s \dot{y} = -H'_x \ und \ \ddot{y} + 2\Omega_s \dot{x} = -H'_y$$
und lässt Terme weg, dann erhält man linearisierte Gleichungen der Form
(6)
$$\ddot{\xi} - 2\Omega_s \dot{\eta} = -H'_{xx}\xi - H'_{xy}\eta \ und \ \ddot{\eta} + 2\Omega_s \dot{\xi} = -H'_{xy}\xi - H'_{yy}\eta,$$
wobei H'_{xx}, H'_{xy}, $H'yy$ im Gleichgewicht bewertet werden.
Wir schauen nun nach Lösungen der Form $\xi = \alpha e^{i\omega t}$ bzw. $\eta = \beta e^{i\omega t}$. Setzt man

diese Werte in die vorigen Gleichungen ein erhält man
(7)
$$-\omega^2\alpha - 2i\Omega_s\omega\beta = -H'_{xx}\alpha - H'_{xy}\beta,$$
$$-\omega^2\beta + 2i\Omega_s\omega\alpha = -H'_{xy}\alpha - H'_{yy}\beta.$$
Um von Null verschiedene Lösungen zu erhalten muss die Determinante von α und β Null sein oder
(8)
$$\omega^4 - \omega^2(4\Omega_s^2 + H'_{xx} + H'_{yy}) + H'_{xx}H'_{yy} - {H'_{xy}}^2 = 0$$
Wir haben
(9)
$$H'_{xx} = -M \pm (Ak^2 - A'' - V_s'''\frac{A'}{M}) + o(A^2)$$
$$H'_{xy} = \mp\frac{2Ak}{r_s} + O(A^2)$$
$$H'_{yy} = \pm\frac{4A}{r_s^2} + O(A^2),$$
folglich
(10)
$$4\Omega_s^2 + H'_{xx} + H'_{yy} = \omega_s^2 \pm [A(k^2 + \frac{4}{r_s^2}) - A'' - V_s'''\frac{A'}{M}] + O(A^2)$$
$$H'_{xx}H'_{yy} - 2{H'_{xy}}^2 = \mp\frac{4AM}{r_s^2} + O(A^2)$$
(obere Zeichen in den Fällen $L_{1,2}$, untere in den Fällen $L_{4,5}$) Im Fall $L_{1,2}$ aus (8) gibt es zwei positive und zwei negative Wurzeln ω^2, hier haben wir folglich Instabilität. Im anderen Fall haben wir für ein kleines A nur positive Wurzeln, also Stabilität. Die Wurzeln von (8) sind positiv, wenn sich folgende Gleichungen für ein positives kleines A erfüllen
(11)
$$4\Omega_s^2 + H'_{xx} + H'_{yy} > 0$$
$$(4\Omega_s^2 + H'_{xx} + H'_{yy})^{-}4(H'_{xx}H'_{yy} - 2{H'_{xy}}^2) > 0$$
Für ein großes A werden die Punkte $L_{4,5}$ instabil. Nehmen wir nur die größten Terme in $L_{4,5}$, so wird (8) zu
(12)
$$\omega^4 - \omega^2(\omega_s^2 - Ak^2) + \frac{4AM}{r_s^2} = 0$$
und die Lösungen sind
(13)
$$\omega_1^2 = \frac{4AM}{r_s^2(\omega_s^2 - Ak^2}, \; \omega_2^2 = \omega_s^2 - Ak^2 - \frac{4AM}{r_s^2(\omega_s^2 - Ak^2}$$
Die Bewegung um L_4, bzw. L_5, findet ausserhalb er korrrespondierenden Kurve der Null-Geschwindigkeit statt und wird definiert durch $H' = h$. Die Kurven der Null-Geschwindigkeit,die durch die Punkte L_1 und L_2 gehen, sind
(14)
$$-\frac{1}{2}M(r - r_s)^2 + Acos(\phi - 2\Theta') + O\_3 = -A$$

Nahe L_4, L_5 (d.h. $\phi - 2\Theta' = 0,\ 2\pi$ sind diese Gleichungen
(15)

$$(r - r_s)^2 = 4\frac{A}{M}$$

Im Fall $h > A$ gibt es keine Kurven der Null-Geschwindigkeit nahe der Korotation.
Wenn h einen Wert zwischen -A und A annimmt, haben wir ovale Kurven von Null-Geschwindigkeit um das Maximum der Potentiale L_4, L_5. Diese Bewegung ist außerhalb der oben genannten Ovale. Nah an L_4 oder L_5 sind diese Kurven Ellipsen.
Lassen wir Terme von höherer Ordnung als A in H' weg, so erhalten wir
(16)

$$H' = A - \frac{1}{2}(M + Ak^2)\xi^2 + \frac{1Ak}{r_s^2}\eta^2 = h$$

Rotieren die Achsen um einen Winkel γ, gegeben durch
(17)

$$tan2\gamma = \frac{-\frac{4Ak}{r_s}}{M + A(k^2 - \frac{4}{r_s^2})},$$

finden wir neue Variablen ξ', η', so dass
(18)

$$H' = A - \frac{1}{2}(\Lambda_1\xi'^2 + \Lambda_2\eta'^2) = h$$

mit
(19)

$$\Lambda_1, \Lambda_2 = \frac{1}{2}[M + A(k^2 + \frac{4}{r_s^2}) \pm \{[M + A(k^2 + \frac{4}{r_s^2})]^2 - \frac{16AM}{r_s^2}\}^{\frac{1}{2}}]$$

Also $\Lambda_1 >> \Lambda_2$, d.h. die η'-Achse ist sehr viel länger als die ξ'-Achse. Näherungsweise haben wir

$$\Lambda_1 = M + Ak^2,\ \Lambda_2 = \frac{4AM}{r_s^2(M + Ak^2)}$$

Schreiben wir nun die Hamilton-Formel mit den Variablen ξ', η', $\dot{\xi}'$, $\dot{\eta}'$
(20)

$$\overline{H} + \frac{1}{2}(\dot{\xi}'^2 + \dot{\eta}'^2) - \frac{1}{2}(\Lambda_1\xi'^2 + \Lambda_2\eta'^2) = h$$

und lassen die Terme höherer Ordnung weg. Dann sind die Bewegungsgleichungen im rotierenden Rahmen
(21)

$$\ddot{\xi}' - 2\Omega_s\,\dot{\eta}' = \Lambda_1\xi',\ \ \ddot{\eta}' + 2\Omega_s\,\dot{\xi}' = \Lambda_2\eta'$$

Daraus ergibt sich für die Integrale
(22)

$$I_1 = \frac{(\omega_1^2 + \Lambda_2)}{2\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\{[\dot{\xi}' - \frac{(\omega_2^2 + \Lambda_2)}{2\Omega_s}\eta']^2 + \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}[\omega_2\xi' + \frac{(\omega_2^2 + \Lambda_2)}{2\Omega_s\omega_2}\,\dot{\eta}']^2\}$$

$$I_2 = \frac{(\omega_2^2+\Lambda_2)}{2\omega_2(\omega_2^2-\omega_1^2)}\{[\dot{\xi}' - \frac{(\omega_1^2+\Lambda_2)}{2\Omega_s}\eta']^2 + \frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}[\omega_1\xi' + \frac{(\omega_1^2+\Lambda_2)}{2\Omega_s\omega_2}\dot{\eta}']^2\},$$

wobei $\omega_{1,2}$ die vorher in (8) ermittelten Wurzeln sind.
Die Hamilton-Formel lässt sich jetzt wie folgt schreiben
(23)

$$H - A = \omega_2 I_1 - \omega_1 I_1$$

Das neue Integral ist entweder I_1 oder I_2. Es wird benutzt, um die Grenzen der Orbits zu finden. Solche Orbits füllen entweder einen Ring um $L_{4,5}$ oder eine Bananen-ähnliche Region, die $L_{4,5}$ beinhaltet.
In den Fällen $I_1 = 0$ und $I_2 = 0$ haben wir lange und kurze Orbits. Lange Orbits gibt es für $h < A$ und

$$\xi_0' = \frac{2\Omega_s}{\omega_s}[\frac{2(A-h)}{M}]^{\frac{1}{2}}.$$

Für $h < A$ sind alle nichtperiodischen Orbits gestreckte Ringe, die die Null-Geschwindigkeit umrunden.
Kurze periodische Orbits existieren dagegen für $h > A$ und

$$\xi_0' = [\frac{2(h-A)}{\omega_s}]^{\frac{1}{2}}$$

In diesem Fall können die nicht-periodischen Orbits Ringe oder Bananen-förmige Gebilde sein.

Quellenverzeichnis

Coley, Alan A. - Dynamical systems and cosmology (2003)
Contopolous, George - Order and chaos in dynamical astronomy (2004)
Meyers Lexikonredaktion - Schülerduden der Physik (1995)
www.wikipedia.de