Chaos unter Koordinatentransformation

Gundula Meckenhäuser

WiSe 2006/07

Inhaltsverzeichnis

1 Die Lorentz-Transformation **2**
- 1.1 Das Michelson-Morley Experiment 2
- 1.2 Die Galilei-Transformation 4
- 1.3 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und die Galilei-Transformation 5
- 1.4 Herleitung der Lorentz-Transformation 5

2 Der Lyapunov-Exponent **7**
- 2.1 Wiederholung wichtiger Begriffe 7
- 2.2 Motivation der Lyapunov-Zahl 7

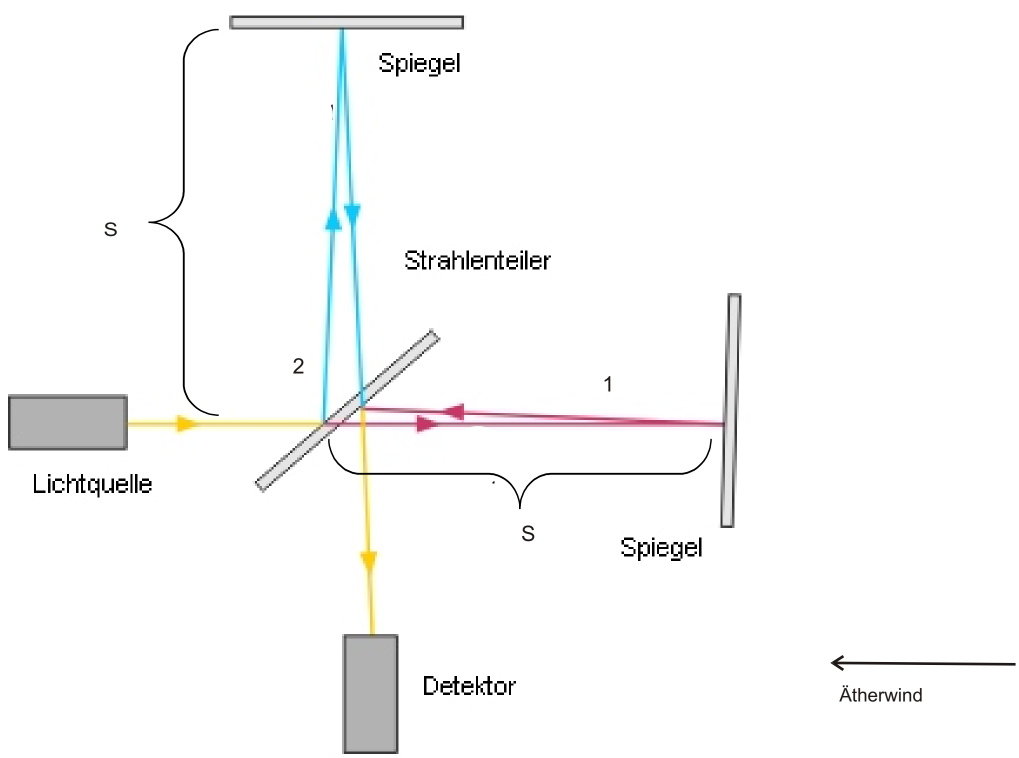
3 Chaos **9**
- 3.1 chaotische Orbits 9
- 3.2 Verhalten von Chaos bei Koordinatenwechsel 10

1 Die Lorentz-Transformation

1.1 Das Michelson-Morley Experiment

Im 19. Jahrhundert zeigten Wissenschaftler die Wellennatur des Lichts auf (heute geht man vom Welle–Teilchen–Dualismus aus, d.h. Licht weist sowohl Teilchen– als auch Welleneigenschaften auf). Analog zu Wasser– und Schallwellen stellte man sich Licht mit einem Ausbreitungsmedium vor, welches man den Lichtäther nannte. Er sollte den ganzen Raum durchdringen, masselos und weder fest noch flüssig noch gasförmig sein. Man nahm an, dass sich der Äther in absoluter Ruhe befinde und sich jeder Körper mit einer bestimmten Geschwindigkeit relativ dazu bewege. Das Michelson–Morley–Experiment hatte zum Zeil, den Äther nachzuweisen. Es wurde 1887 von Albert Abraham Michelson und Edward Morley in Cleveland, Ohio durchgeführt.

Versuchsaufbau. Licht wird von einer Lichtquelle ausgesandt und in einem Strahlenteiler in zwei senkrecht zueinander verlaufende Strahlen geteilt. Jeder Strahl wird von einem Strahlenteiler (beide stehen in gleicher Entfernung s zum Strahlenteiler) reflektiert und gelangt schließlich zum Detektor.



Erwarteter Ausgang. Da sich die Erde im Äther bewegt, wird ein sogenannter Ätherwind erzeugt und die Laufzeit des Lichts wird durch den Wind beeinflusst. Mit der Beziehung $x = vt$ '(Weg=Geschwindigkeit$*$Zeit) erhalten wir für Weg 1 (rot), Hinweg:

$$v_{\text{res}} = c - v_{\text{Äther}} \;\Rightarrow\; t_{1,\text{hin}} = \frac{s}{c - v_{\text{Äther}}}$$

und für den Rückweg:

$$v_{\text{res}} = c + v_{\text{Äther}} \;\Rightarrow\; t_{1,\text{rück}} = \frac{s}{c + v_{\text{Äther}}}$$

Also erhalten wir als Gesamtdurchlaufzeit:

$$t_1 = \frac{2sc}{c^2 - v_{\text{Äther}}^2}$$

Dabei bezeichnen t die Zeit, c die Lichtgeschwindigkeit und v die Geschwindigkeit. Auf Weg 2 (blau) gilt betragsmäßig für beide Strecken:

$$v_{\text{res}} = \sqrt{c^2 - v_{\text{Äther}}^2} \Rightarrow t_2 = \frac{2s}{\sqrt{c^2 - v_{\text{Äther}}^2}}$$

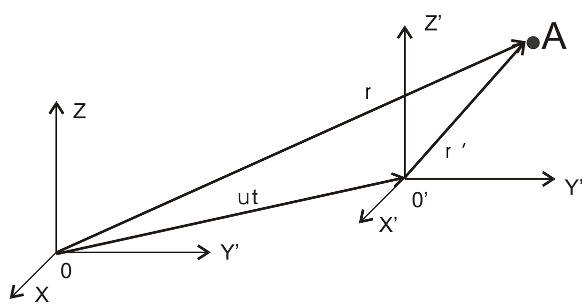
Ein Vergleich der beiden Laufzeiten liefert: $t_1 > t_2$. Aufgrund des Laufzeitunterschiedes, den der Äther hervorruft, kommen die Strahlen phasenverschoben am Detektor an und es entsteht ein Interferenzmuster.

Beobachtung und Deutung. Durch Drehen der Apperatur (dies ist notwendig, da man nicht weiß aus welcher Richtung der Ätherind kommt) konnte nie die „richtige“ Position gefunden werden, d.h. Interferenzmuster blieben aus. Als Erklärung für den negativen Ausgang schlug Michelson folgendes vor: Das Sonnensystem bewegt sich so, dass es den Ätherwind „im Rücken“ verspürt. Die Erde ihrerseits bewegt sich „vorwärts“ um die Sonne, und wenn man annimmt, dass sich die Erde mit derselben Geschwindigkeit „vorwärts“ wie das Sonnensystem „rückwärts“ bewegt, dann würde sich die Erde relativ zum Äther nicht bewegen. Deshalb führte man das Experiment zu verschiedenen Jahreszeiten durch. Aber nie erhielt man die gewünschten Interferenzmuster. D.h. aus dem Versuch, der den Äther nachweisen sollte, musste man deuten, dass es keinen Äther gibt und dass die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich ist.

Der Versuchsausgang widerspricht unserer Alltagserfahrung: Stellen wir uns vor ein Beobachter A steht auf einem Bahnsteig und es kommt ein Zug durchgefahren. Angenommen ein Beobachter B fährt mit dem Rad neben dem Zug her (gleiche Richtung). Dann ist die Geschwindigkeit, die B für den Zug misst kleiner als die Geschwindigkeit, die der ruhende Beobachter A misst. Fährt der Zug nun aber mit Lichtgeschwindigkeit, so ist für beide Beobachter der Zug gleich schnell!

1.2 Die Galilei-Transformation

Gegeben seien zwei Koordinatensyteme S und $S\,'$, wobei sich $S\,'$ mit konstanter Geschwindigkeit $u << c$ gegenüber S. Im Folgenden bezeichnen wir alle Größen, die sich auf $S\,'$ beziehen mit $'$. Wir gehen von einer absoluten Zeit aus, d.h. in beiden Systemen werden gleiche Zeiten gemessen: $t = t\,'$. Als Anfangsbedingung wählen wir: Zum Zeitpunkt $t = 0$ fallen die Nullpunkte zusammen.



Unter Verwendung der absoluten Zeit und den Beziehungen $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ gilt für ein Objekt A

$$\begin{aligned} \vec{r}\,' &= \vec{r} - \vec{u}t \;\Rightarrow \\ \vec{v}\,' &= \vec{v} - \vec{u} \;\Rightarrow \\ \vec{a}\,' &= \vec{a} \end{aligned} \qquad (*)$$

Dies ist die einfachste Form der Galilei–Transformation. Sie gilt auch:

- für gedrehte Bezugssysteme mit zeitlich konstanten Winkeln
- wenn die Nullpunkte nicht zusammenfallen
- für unterschiedliche Zeitpunkte

Aus $(*)$ folgt mit dem 2. Newtonschen Axiom ($\vec{F} = m\vec{a}$, bei konstanter Masse), dass in S und $S\,'$ auf das Objekt A die gleichen Kräfte wirken. D.h. physikalische Gesetze sind unter der Galilei–Transformation invariant.

1.3 Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und die Galilei-Transformation

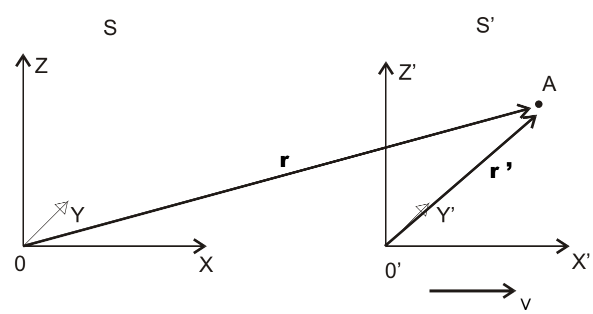
Angenommen in $0\,'$ wird ein Lichtblitz erzeugt und hat in $S\,'$ die Geschwindigkeit $\vec{c}\,'$. Nach Galilei gilt:

$$\vec{c} = \vec{c}\,' + \vec{u}$$

D.h. die Geschwindigkeit des Lichts ist in S größer als in $S\,'$. Dies steht im Widerspruch zum Ausgang des Michelson–Morley–Experiment. Also sind die Galilei-T-ransormationen nur gültig bei Betrachtungen von Geschwindigkeiten, die viel kleiner sind als die Lichtgeschwindigkeit. Im Folgenden leiten wir Transformationsregeln her, die man für Betrachtungen mit Geschwindigkeiten im Bereich der Lichtgeschwindigkeit anwenden kann.

1.4 Herleitung der Lorentz-Transformation

Gegeben seien zwei Inertialsysteme S und $S\,'$, wobei sie sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ gegeneinander in x–Richtung bewegen. Die Achsen seien zueinander parallel und die Nullpunkte fallen für $t = t\,' = 0$ zusammen. Im Gegensatz zur vorherigen Betrachtung gehen wir nicht von absoluter Zeit aus: $t \neq t\,'$.



Angenommen zum Zeitpunkt $t = t\,' = 0$ wurde in $0 = 0\,'$ ein Lichtblitz ausgesandt. Dann hat in S bzw. $S\,'$ das Licht den Raumpunkt A nach der Zeit t bzw. $t\,'$ erreicht. Mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit folgt:

$$\vec{r} = \vec{c}t \iff x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{1}$$

$$\vec{r}\,' = \vec{c}t\,' \iff x\,'^2 + y\,'^2 + z\,'^2 = c^2t\,'^2 \tag{2}$$

Bezeichne $x_{0\,'}$ die x–Koordinate des Nullpunktes $0\,'$. Für sie gilt:

$$x_{0\,'} = vt$$

Nun sind alle $x\,'$–Werte auf $0\,'$ bezogen. D.h. die $x\,'$–Koordinate eines beliebigen Punktes aus $S\,'$, ausgedrückt in Koordinaten von S hängt von $x - vt$ ab. Wir raten daher den linearen Zusammenhang:

$$x\,' = k(x - vt) \tag{3}$$

Da wir nicht von einer absoluten Zeit ausgehen, brauchen die Zeitmessungen für $t > 0$ nicht mehr übereinzustimmen. Hier machen wir den Ansatz:

$$t\,' = a(t - bx) \tag{4}$$

Dies macht Sinn, denn aus $t = 0$ und $x = 0$ folgt $t\,' = 0$, was wir als Anfangsbedingung gewählt hatten. Nun bestimmen wir die Konstanten k, a und b. Dazu setzen wir (3) und (4) in (2) ein und verwenden: $y\,' = y$, $z\,' = z$:

$$\begin{aligned} &k^2(x^2 - 2xvt + v^2t^2) + y^2 + z^2 = c^2a^2(t^2 - 2tbx + b^2x^2) \;\Rightarrow \\ &x^2(k^2 - c^2a^2b^2) - 2xt(k^2v - bc^2a^2) + y^2 + z^2 = c^2t^2(a^2 - \frac{k^2v^2}{c^2}) \end{aligned}$$

Diese Gleichung muss für alle Zeiten mit (1) übereinstimmen. Koeffizientenvergleich liefert:

$$k^2 - c^2a^2b^2 = 1 \tag{5}$$
$$k^2v - bc^2a^2 = 0 \tag{6}$$
$$a^2 - \frac{k^2v^2}{c^2} = 1 \tag{7}$$

Mit diesen Gleichungen können wir die Unbekannten bestimmen:

$$\begin{aligned} (6) \Longrightarrow k^2 = \frac{bc^2a^2}{v} &\overset{(5)}{\Longrightarrow} a^2(\frac{bc^2}{v} - c^2b^2) = 1 \\ \Longrightarrow a^2 = \frac{v}{bc^2 - vc^2b^2} & \end{aligned}$$

Setzt man die Werte für a^2 und k^2 in (7) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} &\frac{v}{bc^2 - vc^2b^2} - ba^2v = 1 \Rightarrow \\ &\frac{v}{bc^2 - vc^2b^2} - \frac{bv^2}{bc^2 - vc^2b^2} = 1 \Rightarrow \\ &v - bv^2 = bc^2 - vc^2b^2 \Rightarrow \\ &0 = b^2 - \frac{c^2 + v^2}{vc^2}b + \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

Lösen der quadratischen Gleichung liefert: $b = \frac{v}{c^2}$. Für a folgt damit:

$$a^2 = \frac{v}{v - \frac{v^3}{c^2}} \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Für k erhalten wir:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Schließlich erhalten wir durch Einsetzen von k, a und b in die Gleichungen (3) und (4) folgende Transformationsvorschriften:

$$x\,' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\; y' = y,\; z' = z$$

$$t\,' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Sie heißen Lorentz–Transformationen und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ wird als Lorentzfaktor bezeichnet. Für $v << c$ gehen diese in die Galilei–Transformationen über.

2 Der Lyapunov-Exponent

2.1 Wiederholung wichtiger Begriffe

Dynamische Systeme sind Systeme, die sich mit der Zeit ändern. Sie können beschrieben werden durch

- Differentialgleichungen der Form: $\frac{dx}{dt} = f(x)$
- Iterationen: $f : X \to X$, $x_{n+1} = f(x_n)$

Unter f^k verstehen wir die k-malige Verkettung von f. Das Orbit von $x \in X$ ist ein Folge $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}_0}$. Ein Fixpunkt von f ist ein Punkt $x \in X$ mit $f(x) = x$. Ein Punkt $x \in X$ heißt k–periodisch, falls $f^k(x) = x$.

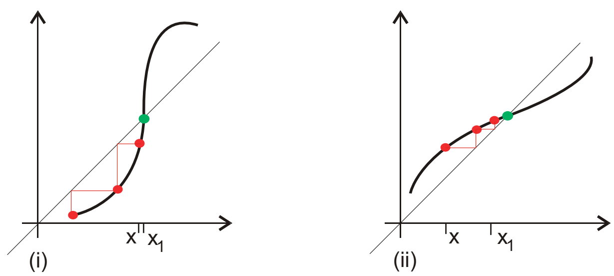
2.2 Motivation der Lyapunov-Zahl

Wir betrachten ein dynamisches System, beschrieben durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und einen Fixpunkt $x_1 \in \mathbb{R}$. Wir untersuchen nun das Verhalten Orbits von Punkten $x \in \mathbb{R}$, die in der Nähe von x_1 starten. Ausschlaggebend für das Verhalten ist die Ableitung von f im Fixpunkt:

(i) $f'(x_1) = a > 1$

(ii) $f'(x_1) = a < 1$

Der Fall $f'(x_1) = 1$ ist einfach: Alle in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_1 liegenden Punkte x sind auch Fixpunkte, d.h. der Abstand vom Orbit von x zum Orbit $\{x_1\}$ ändert sich nicht. Zur Untersuchung der anderen beiden Fälle betrachten wir:



Wir sehen:

(i) Das Orbit von x (rote Punkte) läuft vom Orbit $\{x_1\}$ (grüner Punkt) weg.

(ii) Das Orbit von x nähert sich dem Orbit $\{x_1\}$.

Außerdem beträgt die Änderung des Abstandes des Orbits von x zum Orbit von x_1 pro Iteration a.
Sei nun x_1 ein k–periodischer Punkt. Wir betrachten die Ableitung der k–ten Iteration von f an der Stelle x_1:

$$\begin{aligned}(f^k)'(x_1) &= (f(f^{k-1}))'(x_1) \\ &= f'(f^{k-1}(x_1))(f^{k-1})'(x_1) \\ &= f'(f^{k-1}(x_1))f'(f^{k-2}(x_1))\dots f'(x_1) \\ &= f'(x_k)\dots f'(x_1) =: a\end{aligned}$$

D.h. nach k Iterationen hat sich der Abstand eines in der Nähe von x_1 startendes Orbit zum Orbit von x_1 um a verändert. Daraus folgt: Pro Iteration beträgt die Abstandsänderung $\sqrt[k]{a}$.
Nun definieren wir die Lyapunov–Zahl eines beliebigen Punktes x_1 als diejenige Zahl, die die durchschnittliche Abstandsänderung eines Orbits angibt, welches in der Nähe von x_1 startet:

Definition. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Die Lyapunov–Zahl eines Orbits $\{x_1, x_2, \ldots\}$ ist definiert als:

$$L(x_1) = \lim_{n\to\infty} (|f'(x_1)| \cdot \ldots \cdot |f'(x_n)|)^{1/n}$$

Der Lyapunov-Exponent des Orbits ist definiert als natürlicher Logarithmus der Lyapunov-Zahl:

$$h(x_1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\ln|f'(x_1)| + \ldots + \ln|f'(x_n)|)$$

Bemerkungen. Liegt im Orbit von x_1 ein x_i mit $f'(x_i) = 0$, dann ist der Lyapunov-Exponent nicht definiert. Ist x_1 ein Fixpunkt, so ist der Lyapunov-Exponent $h(x_1) = \ln|f'(x_1)|$ und die Lyapunov-Zahl $h(x_1) = |f'(x_1)|$, was sich mit der obigen Motivation deckt.

3 Chaos

Intuitiv spricht man von einem chaotischen System, falls man nicht vorhersagen kann, wie sich ein System entwickelt, d.h. wenn man die Anfangsdaten geringfügig verändert und die Entwicklung des Systems zu unterscheidlichen Endzuständen führt. In 2.2 haben wir gesehen: Ist die Lyapunov–Zahl eines Orbits größer als Eins (dann ist der Lyapunov–Exponent größer als Null), dann laufen Orbits, die in der Nähe vom ursprünglichen Orbit starten von ihm weg. Bevor wir den Begriff „Chaos“ für Orbits einführen, brauchen wir noch eine Definition:

3.1 chaotische Orbits

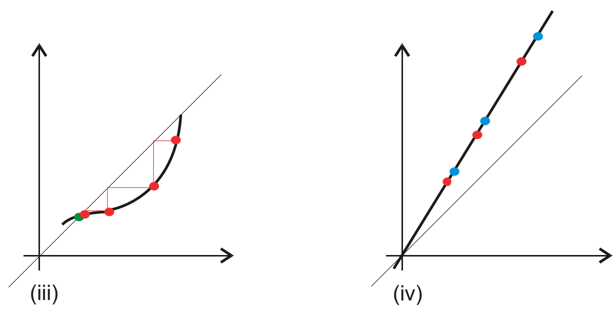
Definition. Ein Orbit $\{x_1, x_2, \ldots\}$ heißt asymptotisch periodisch, falls es einen periodischen Orbit $\{y_1, y_2, \ldots y_k, y_1, y_2 \ldots\}$ gibt, sodass:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = 0$$

Definition. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung und $\{x_1, x_2, \ldots\}$ ein beschränkter Orbit. Er heißt chaotisch, falls

1. $\{x_1, x_2, \ldots\}$ nicht asymptotisch periodisch ist.
2. Der Lyapunov-Exponent größer als Null ist.

In der Einleitung haben wir verdeutlicht, dass wir 2. brauchen. Der Punkt 1. ist notwendig um Fälle wie (*iii*) auszuschließen (Das rote Orbits strebt gegen den periodischen grünen Orbit). Außerdem gilt die Definition nur für beschränkte Orbits, sonst wäre der nicht wünschenswerte Fall (*iv*) möglich.



3.2 Verhalten von Chaos bei Koordinatenwechsel

Zu Beginn hatten wir gesehen, wie sich physikalische Gesetze (relativistisch) transformieren. Abschließend möchte ich einen Ausblick geben, wie sich Chaos bei Koordinatenwechsel im klassischen und im relativistischen Fall verhält.
In der newtonschen Physik werden dynamische Systeme durch

$$\frac{dx}{dt} = F(x)$$

beschrieben, wobei x eine beliebige physikalische Größe und t die Zeit ist. Ein Beispiel dafür wäre das zweite Newtonsche Axiom $F = \frac{dp}{dt}$, das mit $p = mv$ bei konstanter Masse in die bekannte Form $F = ma$ übergeht. Ohne Erläuterung möchte ich folgende ausgeweitete Definition von Chaos angeben:
Chaos kann mit Lyapunov-Exponenten gemessen werden, falls zusätzlich gilt:

(i) Das obige System autonom ist.

(ii) Der zu betrachtende Teil des Zustandraumes kompakt ist.

(iii) Das invariante Mass normalisierbar ist.[1]

(iv) Der Definitionsbereich der Zeit unendlich ist.

[1] Ein Maß μ heißt invariant unter einem Fluss ϕ, wenn gilt: $\mu(A) = \mu(\phi_t(A)$ für alle t. Es heißt normalisierbar, falls es endlich ist.

In der klassischen Physik geht man von absoluter Zeit aus; also kann das dynamische System mit Raum–Diffeomorphismen transformiert werden. D.h. die Forderungen (*i*), (*iii*) und (*iv*) bleiben erhalten, da die Zeit nicht transformiert wird. Da das Bild eines Kompaktums unter einer stetigen Abbildung kompakt ist, ist auch (*ii*) nach der Transformation erfüllt. Also bleibt chaotisches Verhlaten in der klassischen Physik bei Koordinatentransformation erhalten.
Betrachten wir das dynamische System aus relativistischer Sicht, d.h. es existiert keine absolute Zeit, dann muss man mit Raum–Zeit–Diffeomorphismen transformieren. Man kann zeigen, dass Lyapunov-Exponenten bei Koordinatentransformation von der Wahl des Zeitparameters abhängen. Im klassischen Fall war dies nicht von Bedeutung, da wir von absoluter Zeit ausgingen. Etwas genauer: Lyapunov–Exponenten transformieren sich wie folgt:

$$h_\tau = h_t \cdot \alpha$$

Dabei bezeichnet τ den Zeitparameter nach der Transformation und $0 < \alpha < \infty$. Also nehmen die Lyapunov–Exponenten bei relativistischer Koordinatentransformation zwar andere Werte an, behalten aber ihr Vorzeichen. Da für das chaotische Verhalten nur das Vorzeichen der Lyapunov–Exponenten relevant ist, ist auch Chaos im relativistischen Fall koordinaten–invariant.

Literatur

[1] Demtröder, Wolfgang: Experimentalphysik 1. 4. Aufl. Berlin u.a.: Springer, 2006. -ISBN- 3-540-26034-X

[2] Alligood, Kathleen T., Sauer, Tim D., Yorke, James A.: Chaos : An Introduction to Dynamical Systems. New York u.a.: Springer, 1996. -ISBN- 0-387-94677-2

[3] Motter, Adilson E.: Relativistic Chaos is Coordinate Invariant. Physical Review Letters. vom 5. Dezember 2003

[4] Wikipedia. Die freie Enzyklopädie. http://de.wikipedia.org