Die Synchronisation von gekoppelten Oszillatoren

Richard Rösler

20.12.2006

1 Einleitung

- 1655 Christiaan Huygens erfindet die Pendeluhr
- Huygens entdeckt das Phänomen der Synchronisation von Pendeluhren und berichtet davon in Briefen an Sir Robert Moray

2 gekoppelte Pendel

Bevor wir uns gekoppelten Uhren widmen, die durch eine Energiequelle wie ein Gewicht oder eine gespannte Feder gespeist werden, analysieren wir das Verhalten von schwach gekoppelten Pendeln. Es seien also zwei identische Pendel an einer Befestigung aufgehängt und mit einem dünnen, fast masselosen Faden bzw. einer masselosen Feder gekoppelt (die Federkonstante werden wir so klein machen, dass wir es in der Tat mit einer schwachen Kopplung zu tun haben). Die Auslenkungen der Pendel seien ϕ_1 und ϕ_2. Die Pendellängen und Massen seien beide gleich 1. Die kinetische Energie des Systems ist $T = \frac{1}{2}(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2)$ und die potentielle Energie der Kopplung $U_1 = \frac{\alpha}{2}(\phi_1 - \phi_2)^2$ und die potentielle Energie der Pendel gleich $U_2 = \frac{1}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2)$. Für die gesamte potentielle Energie also $U = \frac{1}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2+\alpha(\phi_1-\phi_2)^2)$. Wir machen die Hauptachsentransformation

$$Q_1 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{\sqrt{2}}, \quad Q_2 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\sqrt{2}}.$$

Natürlich ist damit auch $\phi_1 = (Q_1+Q_2)/\sqrt{2}$ und $\phi_2 = (Q_1-Q_2)/\sqrt{2}$. Im Konfigurationsraum ist dann

$$T = \frac{1}{2}(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2) \quad \text{und} \quad U = \frac{1}{2}(\omega_1^2 Q_1^2 + \omega_2^2 Q_2^2).$$

Dabei haben wir $\omega_1 = 1$ und $\omega_2 = \sqrt{1+2\alpha}$ gesetzt. Für die beiden Eigenfrequenzen gibt es dann die Fälle

1. $Q_2 = 0$; also der Fall $\phi_1 = \phi_2$. Das heißt, dass die Pendel sich in Phase bewegen mit der originalen Frequenz 1 als ob die Kopplung keinen Effekt hätte.
2. $Q_1 = 0$; das ist der Fall $\phi_1 = -\phi_2$. Die Pendel bewegen sich in Gegenphase mit $\omega_2 > 1$ aufgrund der Kopplung.

Wir betrachten nun für $\alpha \ll 1$ das Phänomen des Transfer von kinetischer Energie von einem Pendel auf das andere. Der Ausgangszustand sei $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$ und das erste Pendel erhalte die Geschwindigkeit $v = \dot{\phi}_1(0)$. Wir wollen zeigen, dass nach einer Zeitspanne T das erste Pendel stationär wird und die Bewegungsenergie auf das zweite Pendel übergegangen sein wird. Mit den Anfangsbedingungen $Q_1(0) = 0$ und $Q_2(0) = 0$ erhalten wir die Bewegung

$$Q_1(t) = c_1 \sin t \quad \text{und} \quad Q_2(t) = c_2 \sin \omega t$$

mit $\omega = \sqrt{1 + 2\alpha} \approx 1 + \alpha$ weil $\alpha \ll 1$. Weil $\dot{Q}_1(0) = \dot{Q}_2(0) = v/2$ ist, bestimmen wir die Amplituden zu

$$c_1 = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad c_2 = \frac{v}{\omega\sqrt{2}}.$$

Die Bewegungsgleichungen sind also

$$Q_1(t) = \frac{v}{\sqrt{2}} \sin t, \quad Q_2(t) = \frac{v}{\omega\sqrt{2}} \sin \omega t,$$

und zurücktransformiert in das ursprüngliche System

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{v}{\sqrt{2}} \sin t + \frac{v}{\omega\sqrt{2}} \sin \omega t \right) = \frac{v}{2} \left(\sin t + \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right), \\ \phi_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{v}{\sqrt{2}} \sin t - \frac{v}{\omega\sqrt{2}} \sin \omega t \right) = \frac{v}{2} \left(\sin t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right). \end{aligned}$$

Mit den Additionstheoremen und unserer Annahme für kleines α erhalten wir die Näherung

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &\approx \frac{v}{2}(\sin t + \sin \omega t) = v \cos \epsilon t \sin \omega' t, \\ \phi_2(t) &\approx \frac{v}{2}(\sin t - \sin \omega t) = -v \cos \omega' t \sin \epsilon t. \end{aligned}$$

Dabei haben wir

$$\omega' = \frac{\omega + 1}{2} \quad \text{und} \quad \epsilon = \frac{\omega - 1}{2}$$

gesetzt. Mit unserer Abschätzung ist dann $\epsilon \approx \alpha/2$ und $\omega' \approx (2 + \alpha)/2 \approx 1$. Die Größe ϕ_1 verläuft also mit der Frequenz ω', welche fast eins ist und mit der zeitabhängigen Amplitude $v \cos \epsilon t$. Wir können die Zeitspanne T einfach zu $T = \frac{\pi}{2\epsilon} \approx \frac{\pi}{\alpha}$ bestimmen. Nach dieser Zeit ist die kinetische Energie von Pendel 1 auf Pendel 2 übergegangen. Nach der Zeitspanne $2T$ hat sich dieser Zustand umgekehrt und das zweite hat fast keine Bewegungsenergie und ist stationär.

3 gekoppelte Metronome

Nun modifizieren wir unser Modell, indem wir die Pendel zu Metronomen erweitern, also eine Steuerungskomponente hinzufügen, die die Pendel mit Energie versorgt und das System in Gang hält. Wir betrachten nun ein System von zwei Metronomen, die auf einem Brett stehen, welches wiederum auf zwei Rollen lagert und so eine schwache Kopplung garantiert. Die Bewegungsgleichung für ein einzelnes Metronom auf einem rollenden Untergrund lautet dann

$$\theta^{\cdot\cdot} + \frac{mrg}{I} + \mu \left(\left(\frac{\theta}{\theta_0} \right)^2 - 1 \right) \dot{\theta} + \frac{rm \cos \theta}{I} \ddot{x} = 0.$$

Dabei sei $\mu > 0$.

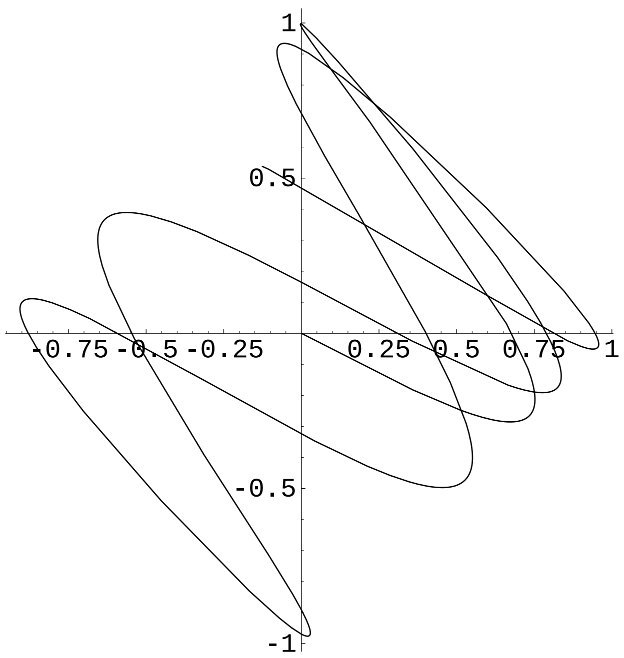

Abbildung 1: Trajektorien gekoppelter Pendel im Konfigurationsraum für $0 \leq t \leq 20$ und $v = 1, \epsilon = 0,5$ und $\omega' = 0,95$

Literatur

[1] Matthew Bennett et.al., Huygens clocks,

[2] James Pantelone, Synchronisation of metronomes,

[3] Dava Sobel, Longitude, B&T, 2003

[4] Steven Strogatz, SYNC: The Emerging Science of Spontaneous Order, HyperionPress, NewYork, 2003

[5] Christian Huygens, die Pendeluhr: Horologium oscillarium (1763), vol. 192 von Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, A. Heckscher, A. von Öttingen, Leipzig 1913