Carl Schröder

Klassische Friedmann-Modelle des Universums

Seminar zu Gewöhnliche Differentialgleichungen
WiSe 2006/07

There is a theory which states that if ever anyone discovers exactly what the Universe is for and why it is here, it will instantly disappear and be replaced by something even more bizarre and inexplicable. – There is another theory which states that this has already happened.

(The Restaurant at the End of the Universe)

Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Professor R. Gunesch

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Geschichte

Ziel dieser Seminararbeit ist es Modelle unseres Universums zu entwickeln, aus der man insbesondere die zukünftige Entwicklung des Kosmos ablesen kann. Es werden dabei zwei wesentliche Differentialgleichungen entwickelt, die auf Alexander FRIEDMANN[1] aus dem Jahre 1922 zurückgehen. Diese FRIEDMANN-Modelle waren für die damalige Zeit sehr exotisch, da sie expandierende und kontrahierende, also dynamische Universen beschreiben (EINSTEIN glaubte wie die meisten seiner Kollegen, dass das Universum statisch sein müsse). Da die FRIEDMANN-Gleichungen sowie die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) keine statischen Universen zulassen, führte EINSTEIN die sogenannte kosmologische Konstante Λ ein. 1929 stellte sich durch HUBBLEs Entdeckung der Rotverschiebung aber heraus, dass sich fast alle Galaxien voneinander wegbewegen, dies wurde als Expandieren des Universums gedeutet.
Um das Verhalten des Universums gut modellieren zu können, muss zunächstgeklärt werden, welche Voraussetzungen getroffen werden. Es werden vier Annahmen getroffen:

- *Kosmologische Prinzip*: Das Universum ist homogen (Universum sieht von jedem Punkt gleich aus) und isotrop (Universum sieht in jeder Richtung gleich aus).
- Das Universum dehnt sich zur jetzt-Zeit kugelsymmetrisch aus.
- Von den vier Grundkräften muss nur die Gravitation berücksichtigt werden und der Kosmos verhält sich wie ein ideales Gas.
- Die Funktionen/Variablen sind gutmütig (zweimal differenzierbar etc.).

Die erste Annahme gilt nur für große Maßstäbe $\approx$100 Mpc (1pc entspricht ungefähr 3,3 Lichtjahren, Durchmesser der Milchstraße $\approx$ 25–30 Kpc).

[1] Alexander Alexandrowitsch FRIEDMANN, 1888–1925, russischer Mathematiker und Physiker. FRIEDMANN entwickelte noch vor Hubbles Entdeckung der Rotverschiebung Modelle für expandierende Universen.

Die zweite Annahme ist durch die Entdeckung der Rotverschiebung durch Edwin HUBBLE[2] 1929 plausibel.
Die dritte Annahme ist berechtigt, da die Kräfte der schwachen und starken Kernkraft mit der Entfernung sehr schnell abfallen; da die Welt Ladungsneutral ist, müssen auch keine elektromagnetischen Kräfte berücksichtigt werden. Das man von einem idealen Gas ausgeht hat einfachheits Gründe.
Die vierte Annahme wird häufig nicht gesehen, ist aber notwendig, damit man überhaupt »gut« modellieren kann.
Die klassischen FRIEDMANN-LEMAÎTRE[3]-Expansionsgleichungen lauten:

$$H(t)^2 := \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{Kc^2}{a(t)^2} \tag{1}$$

sowie

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho(t) + \frac{3P}{c^2}\right); \tag{2}$$

wobei $H(t)$ die Expansionsrate (HUBBLE-Parameter), $a(t)$ der Skalenfaktor, $\rho(t)$ die Dichte, P der Druck, $G = 6,6742 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$ die Gravitationskonstante, $c = 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ die Lichtgeschwindigkeit und K die Krümmung des Raumes ist.

2 Herleitung der Friedmann-Lemaître-Expansionsgleichungen

2.1 Klassische 1. Friedmann-DGL

Ziel dieses Abschnittes ist es die erste FRIEDMANN-LEMAÎTRE-DGL herzuleiten:

$$H(t)^2 := \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{Kc^2}{a(t)^2}.$$

Betrachte zunächst eine Kugel mit Radius x und Dichte ρ_0 zur Zeit t_0 (heute). Für ein sich kugelsymmetrisch-ausdehnendes/zusammenziehendes Universum verändert sich der Radius mit der Zeit nach einer Funktion $a(t)$, dem sogannten *Skalenfaktor* (einheitenlos):

$$r(t) = a(t)x,$$

entsprechend für die Dichte:

$$\rho(t) = \rho_0 a(t)^{-3}.$$

Die Masse in der sich ausdehnenden/zusammenziehenden Kugel ist zu jeder Zeit die selbe und lautet:

$$M(x) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 x^3.$$

[2] Edwin Powell HUBBLE, 1889–1953, amerikanischer Astronom. Entdeckte 1929 die Rotverschiebing von Galaxien und damit die Expansion des Weltalls. Nach ihm ist das Hubble-Space-Telescope (HST) bennant, welches insbesondere Rotverschiebungen von Galaxien misst.
[3] Abbé Georges Henri LEMAÎTRE, 1894–1966, belgischer Physiker und Geistlicher. Entwickelte die Vorstellung des Urknalls (Big Bang).

Ein Teilchen auf der Kugelschale erfährt die Gravitationsbeschleunigung $GM(x)/r(t)^2$. Die Bewegungsgleichung ist damit:

$$\ddot{r}(t) = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\, t^2} = -\frac{GM(x)}{r(t)^2} = -\frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_0 x^3}{r(t)^2}.$$

ersetzt man mit $r(t) = a(t)x$, ergibt sich:

$$\ddot{a}(t) = \frac{\ddot{r}(t)}{x} = -\frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a(t)^2} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)a(t).$$

Zur Übersichtlichkeit wird die Abhängigkeit von t nicht mehr mitgeschrieben:

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_0}{a^2} \quad | \cdot 2\dot{a} \\ \Rightarrow 2\ddot{a}\dot{a} &= -\frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{\dot{a}}{a^2} \end{aligned}$$

Nun ist aber gerade $2\dot{a}\ddot{a} = \frac{\mathrm{d}\,\dot{a}^2}{\mathrm{d}\,t}$ und $-\dot{a}/a^2 = \frac{\mathrm{d}(a^{-1})}{\mathrm{d}\,t}$. Damit erhält man

$$\frac{\mathrm{d}\,\dot{a}^2}{\mathrm{d}\,t} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 \frac{\mathrm{d}(a^{-1})}{\mathrm{d}\,t}.$$

Wird das ganze nun nach t integriert, so ergibt sich:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a^{-1} - Kc^2,$$

wobei $-Kc^2$ eine Integrationskonstante ist.
Ersetzt man nun $\rho_0 = \rho a^3$ und teilt dann durch a^2, so erhält man die gewünschte Gleichung 1:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}.$$

2.2 Klassische 2. Friedmann-DGL: Die ART kommt ins Spiel

In diesem Abschnitt wird nun

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\frac{3P}{c^2} + \rho\right) \tag{3}$$

hergeleitet.
Ohne Herleitung benutzen wir in diesem Abschnitt den 1. Hauptsatz der Thermodynamik (die Änderung der inneren Energie $\mathrm{d}\,U$ bei Volumenänderung $\mathrm{d}\,V$ ist gleich der Arbeit: $\mathrm{d}\,U = -P\,\mathrm{d}\,V$) in Form der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) (P: Druck der Materie):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(c^2\rho a^3) &= -P\frac{\mathrm{d}\,a^3}{\mathrm{d}\,t} \\ \Rightarrow \dot{\rho}a^3 + 3\rho a^2\dot{a} &= -3Pa^2\frac{\dot{a}}{c^2} \\ \Rightarrow \dot{\rho}a^2 &= -3a\dot{a}\left(\frac{P}{c^2} + \rho\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Hier kommt also die ART in Spiel.
Um die endgültige 2. FRIEDMANN-LEMAÎTRE-Expansionsgleichung herzuleiten, verweden wir Gleichung 1:

$$\begin{aligned}\dot{a}^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - Kc^2 \quad \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\\ 2\dot{a}\ddot{a} &= \frac{8\pi G}{3}\left(\dot{\rho}a^2 + 2a\dot{a}\rho\right)\end{aligned}$$

Setzen wir nun Gleichung 4 ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}2\dot{a}\ddot{a} &= \frac{8\pi G}{3}\left(-3a\dot{a}\left(\frac{P}{c^2}+\rho\right) + 2a\dot{a}\rho\right)\\ 2\dot{a}\ddot{a} &= \frac{8\pi G}{3}a\dot{a}\left(-\frac{3P}{c^2} - 3\rho + 2\rho\right) \quad \mid \div 2, \div a, \div \dot{a}\\ \Leftrightarrow \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\frac{3P}{c^2}+\rho\right).\end{aligned}$$

Nun haben wir die beiden FRIEDMANN-LEMAÎTRE-Gleichungen.

3 Friedmann-Weltmodelle

3.1 Modell 1

Sei $K<0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}&\forall\, t \in [0;\infty[: \quad \dot{a}(t)^2 = \underbrace{\frac{8\pi G}{3}\rho(t)}_{\geq 0}\underbrace{a(t)^2}_{\geq 0}\underbrace{-Kc^2}_{>0} > 0\\ \Rightarrow\quad &\forall\, t \in [0;\infty[: \quad \dot{a}(t) > 0.\end{aligned}$$

Das Universum expandiert also für alle Zeit t.

3.2 Modell 2

Sei $K=0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}&\forall\, t \in [0;\infty[: \quad \dot{a}(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)a(t)^2 = \underbrace{\frac{8\pi G}{3}\rho_0\frac{1}{a(t)}}_{>0} > 0\\ \Rightarrow\quad &\forall\, t \in [0;\infty[: \quad \dot{a}(t) > 0.\end{aligned}$$

Hier expandiert das Universum auch für alle Zeiten t wie beim Modell 1, allerdings gilt:

$$\lim_{t\to\infty}\dot{a}(t) = 0,$$

und damit verlangsamt sich die Expansion.
Dieses Modell heißt EINSTEIN[4]-DE-SITTER[5]-Modell.

[4] Albert EINSTEIN, 1879–1955, der wohl bekannteste Physiker der Gegenwart. Entwickelte 1905 die spezielle und 1916 die allgemeine Relativitätstheorie.
[5] Willem DE SITTER, 1872–1934, niederländischer Mathematiker und Astronom. Veröffentlichte das EINSTEIN-DE-SITTER-Modell 1932.

3.3 Modell 3

Sei $K > 0$. Dann gilt:

$$\dot{a}(t)^2 = \underbrace{\frac{8\pi G}{3}\rho(t)a(t)^2}_{\geq 0} \underbrace{-Kc^2}_{<0}.$$

Überprüfung auf Extremalstellen:

$$\begin{aligned}
&\dot{a}(t_{\mathrm{E}})^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t_{\mathrm{E}})a(t_{\mathrm{E}})^2 - Kc^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0\frac{1}{a(t_{\mathrm{E}})} - Kc^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & a(t_{\mathrm{E}}) = a_{\max} = \frac{8\pi G\rho_0}{3Kc^2} > 0.
\end{aligned}$$

t_E ist eine Maximalstelle, denn nach der zweiten Friedmann-Lemaître-DGL gilt:

$$\begin{aligned}
\ddot{a}(t_{\mathrm{E}}) &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\frac{3P}{c^2} + \rho(t_E)\right)a(t_{\mathrm{E}}) \\
&= -\frac{4\pi G}{3}\left(\frac{3P}{c^2} + \rho_0\frac{1}{a(t_{\mathrm{E}})^3}\right)a(t_{\mathrm{E}}) \\
&= -\frac{4\pi G}{3}\left(\frac{3P}{c^2} + \rho_0\frac{1}{\left(\frac{8\pi G\rho_0}{3Kc^2}\right)^3}\right)\frac{8\pi G\rho_0}{3Kc^2} < 0.
\end{aligned}$$

Also expandiert das Universum im Zeitraum $[0, t_{\mathrm{E}}]$ und kollabiert im Zeitraum $]t_{\mathrm{E}}, \infty[$.

4 Einstein-de-Sitter-Modell

Für das Friedmann-Modell mit $K = 0$ sieht die DGL wie folgt aus:

$$\dot{a}(t) = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho(t)a(t)^2} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0}\frac{1}{\sqrt{a(t)}}.$$

Setzen wir an $a(t) := (Ct)^\beta = C^\beta t^\beta$, so ergibt eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\dot{a}(t) = C^\beta \cdot \beta \cdot t^{\beta-1} &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0}\frac{1}{\sqrt{C^\beta t^\beta}} \\
&= \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0} \cdot C^{-\frac{1}{2}\beta} \cdot t^{-\frac{1}{2}\beta}.
\end{aligned}$$

Damit ist $\beta = \frac{2}{3}$ und

$$\begin{aligned}
&C^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0} \cdot C^{-\frac{1}{3}} \\
\Leftrightarrow \quad & C = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0}.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$a(t) = \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0} \cdot t \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Betrachtet man

$$\lim_{t\to 0} a(t) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_0} \cdot t \right)^{\frac{2}{3}} = 0.$$

Dies besagt aber nichts anderes, dass das Universum zum Zeitpunkt $t = 0$ zu einem Punkt zusammengezogen war und sich dann ausgedehnt hat. Diesen Vorgang nennt man den Urknall bzw. Big Bang.
Ein Problem ist allerdings wie sich die Dichte der Materie verhält:

$$\lim_{t\to 0} \rho(t) = \lim_{t\to 0} \rho_0 \frac{1}{a(t)} = \infty.$$

Da aber sich die Materie aber bei großer Packungsdichte anders verhält, ist fraglich, wie die Dichterelation ausieht.

5 Pulsierendes Universum

Das Modell 3 mit dem Wert für K von $+1$ beschreibt ein pulsierendes Universum, das in einem Big Bang entsteht und dann in einem Big Crunch (Kollaps) endet. Die Lösung ist eine Zykloide.
Betrachte zunächst die DGL für $K := 1$:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{1}{a} - c^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{a} = \sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3}\frac{1}{a} - c^2} = \sqrt{c^2 \left(\frac{8\pi G\rho_0}{3c^2}\frac{1}{a} - 1 \right)}$$
$$= c\sqrt{\frac{8\pi G\rho_0}{3c^2}\frac{1}{a} - 1}.$$

Mit $\xi := \frac{8\pi G\rho_0}{3c^2}$ gilt dann:

$$\dot{a} = \frac{\mathrm{d}\,a}{\mathrm{d}\,t} = c\sqrt{\frac{\xi}{a} - 1}.$$

Trennung der Variablen ergibt:

$$\int c\,\mathrm{d}\,t = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi}{a} - 1}}\,\mathrm{d}\,a = \int \sqrt{\frac{1}{\frac{\xi}{a} - \frac{a}{a}}}\,\mathrm{d}\,a = \int \sqrt{\frac{a}{\xi - a}}\,\mathrm{d}\,a.$$

Substitution $a := \xi \sin^2(\theta)$ ergibt dann mit einer Integrationskonstanten b:

$$\begin{aligned}
ct + b = \int c \,\mathrm{d}\, t &= \int \sqrt{\frac{\xi \sin^2(\theta)}{\xi - \xi \sin^2(\theta)}} 2\xi \sin(\theta) \cos(\theta) \,\mathrm{d}\,\theta \\
&= \int \sqrt{\frac{\xi \sin^2(\theta)}{\xi(1 - \sin^2(\theta))}} 2\xi \sin(\theta) \cos(\theta) \,\mathrm{d}\,\theta \\
&= \int \sqrt{\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} 2\xi \sin(\theta) \cos(\theta) \,\mathrm{d}\,\theta = \int 2\xi \sin^2(\theta) \,\mathrm{d}\,\theta = 2\xi \frac{1}{2}(\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)).
\end{aligned}$$

Damit ist (Additionstheorem: $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \sin(x + y)$ für $x = y = \theta$ eingesetzt):

$$ct + b = \xi(\theta - \sin(\theta)\cos(\theta)) = \xi(\theta - \frac{1}{2}\cos(2\theta)) = \frac{\xi}{2}(2\theta - \sin(2\theta)).$$

Also zusammen gilt dann (mittels Additionstheorem: $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$ für $x = \theta/2, y = 0$):

$$\begin{aligned}
a = \xi \sin^2(\theta) &= \frac{\xi}{2}(1 - \cos(2\theta)) \\
ct + b &= \frac{\xi}{2}(2\theta - \sin(2\theta)).
\end{aligned}$$

b setzt man auf 0, damit die Zykloide bei $(0, 0)$ startet.

6 Ausblick

Da die klassischen Friedmann-Modelle wie oben keine statischen Universen vorhersagen, führte Einstein (der wie andere davon überzeugt war, dass das Universum statisch sein müsse) die sogenannte Kosmologische Konstante Λ ein. Die Friedmann-Lemaître-Expansionsgleichungen sind dann:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{Kc^2}{a(t)^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

sowie

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho(t) + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda}{3}.$$

Nach Entdeckung der Rotverschiebung durch Hubble und damit der Einsicht, dass das Universum nicht-statisch ist, nannte Einstein die Einführung der Kosmologischen Konstante angeblich seine »größte Eselei«.
Heutzutage wird die Kosmologische Konstante dennoch beibehalten, da es eine andere Interpretation gibt: die Vakuumsenergiedichte, die über die kosmologische Konstante verknüpft ist. Die Astronomen glauben heute, dass $\Lambda \neq 0$ ist, aber eine genaue Messung steht noch aus.

Quellen- und Literaturverzeichnis

[Sch06] SCHNEIDER, Peter: *Einführung in die Extragalaktische Astronomie und Kosmologie.* 1. Aufl. Berlin u. a.: Springer, 2006. –ISBN-10 3-540-25832-9

[LaPu05] LANG, Christian B.; PUCKER, Norbert: *Mathematische Methoden in der Physik.* 2. Aufl. München u. a.: Elsevier, 2005. –ISBN-3-8274-1558-6

[Wiki] *Wikipedia. Die freie Enzyklopädie.* http://de.wikipedia.org