Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme II

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1:
Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, L_A die **Arnold'sche Katzenabbildung**, $G_q := \left\{ \left[\binom{a/q}{b/q} \right] \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}$ das $q \times q$-Gitter auf dem 2-Torus ($q \in \mathbb{N}$).

Zeigen Sie: Es gibt kein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $L_A^n = \text{id}$. Aber für jedes $q \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n = n(q)$, so dass $(L_A|_{G_q})^n = \text{id}$. Finden Sie eine obere Schranke für $n(100)$.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie: Wenn Λ_1 eine hyperbolische Menge für $f_1 : U_1 \to M_1$ ist und Λ_2 eine hyperbolische Menge für $f_2 : U_2 \to M_2$, dann ist $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ eine hyperbolische Menge für die Produktabbildung $f_1 \times f_2 : U_1 \times U_2 \to M_1 \times M_2$, definiert durch $(f_1 \times f_2)((x, y)) := (f_1(x), f_2(y))$.

Aufgabe 3:
a) Zeigen Sie:

$$d_{\lambda,N}(\alpha, \omega) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \lambda^{-|i|} |\alpha_i - \omega_i|$$

ist für jedes $\lambda > 1$ eine Metrik auf der Menge Ω_N aller **zweiseitigen Symbolsequenzen** über dem Alphabet $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

b) Zeigen Sie: Für alle $\lambda > 2N - 1$ ist für jede Wahl von $\alpha_{-n}, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ der **Zylinder** $Z_{\alpha_{-n},\ldots,\alpha_n} = \{\omega \in \Omega_N : \omega_{-n} = \alpha_{-n}, \ldots, \omega_n = \alpha_n\} \subset \Omega_N$ ein offener Ball mit Radius λ^{-n} in Ω_N bezüglich der Metrik $d_{\lambda,N}$.

c) Zeigen Sie: Für $\lambda > N$ ist der Zylinder $Z_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n} \subset \Omega_N^R$ ein offener Ball mit Radius λ^{-n} bezüglich der Metrik $d_{\lambda,N}(\alpha, \omega) := \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \lambda^{-i} |\alpha_i - \omega_i|$ auf der Menge Ω_N^R aller **einseitigen Symbolsequenzen** über dem Alphabet $\{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Aufgabe 4:
Für eine Abbildung $f : X \to X$ heißt ein Punkt $x \in X$ **nicht-wandernd**, wenn es für jede offene Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $f^N(U) \cap U \neq \emptyset$. Andernfalls heißt x **wandernd**. Finden Sie einen orientierungserhaltenden Kreishomöomorphismus f mit Rotationszahl $[\alpha]$:

a) für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass f keine wandernden Punkte besitzt.

b) für beliebiges $\alpha \in \mathbb{Q}$, so dass alle Punkte bis auf endlich viele wandernd sind.

c) für beliebiges $\alpha \notin \mathbb{Q}$, so dass die Menge der wandernden Punkte ein Intervall positiver Länge enthält.

Abgabe: 25.11.2008 in der Vorlesung