Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme II

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1:
Sei $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ und f auf dem n-Torus definiert durch $f([x]) = [A \cdot x]$.

Formulieren und beweisen Sie eine Bedingung an das Spektrum von A, die äquivalent zur Expansivität von f ist.

Aufgabe 2:
Sei $f : U \to M$ eine invertierbare C^1-Abbildung und Λ eine kompakte f-invariante Menge. Zeigen Sie: Λ ist hyperbolisch genau dann, wenn gilt: es gibt $\mu > 1$, es gibt eine Aufspaltung $T_\Lambda M = A^s \oplus A^u$, und es gibt $\gamma = \gamma(x) > 0$, so dass für die Bündel von Kegeln

$$K^s = \{v \in T_x M \mid x \in \Lambda,\ v = v^s + v^u,\ v^s \in A^s,\ v^u \in A^u,\ ||v^u|| \leq \gamma ||v^s||\}$$
$$K^u = \{v \in T_x M \mid x \in \Lambda,\ v = v^s + v^u,\ v^s \in A^s,\ v^u \in A^u,\ ||v^s|| \leq \gamma ||v^u||\}$$

gilt, dass $Df \cdot K^u$ im Inneren von K^u enthalten ist, dass $Df^{-1} \cdot K^s$ im Inneren von K^s enthalten ist, und so dass gilt

$$||Df|_{K^u}|| > \mu, \quad ||Df^{-1}|_{K^s}|| > \mu.$$

Aufgabe 3:
a) Zeigen Sie: Der 2-dimensionale Cantor-Staub $\Lambda = C \times C$ (mit der Standard-Cantormenge C) ist eine hyperbolische Menge für die G-förmige Hufeisen-Büroklammer $f : U \to M$, mit

$$f = \begin{cases} (3x, y/3) & x \leq 4/10 \\ (3x-2, y/3 + 2/3) & x \geq 6/10, \end{cases}$$

$U =$ offene $\frac{1}{10}$-Umgebung von $[0,1] \times ([0,1/3] \cup [2/3,1])$, und $M = \mathbb{R}^2$.

b) Ist Λ lokal maximal? (Beweis oder Widerlegung)

Aufgabe 4:
Zeigen Sie: Eine lokal maximale hyperbolische Menge Λ, welche minimal ist (jedes Orbit von $x \in \Lambda$ ist dicht in Λ), besteht aus genau einem periodischen Orbit.

Abgabe: 5.12.2008 in der Vorlesung