Prof. Roland Gunesch Wintersemester 2008-09

Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme II

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1:
Für $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ist auf dem n-Torus eine Translation definiert durch

$$T(x_1, \ldots, x_n) := (x_1 + a_1, \ldots, x_n + a_n) \qquad (\text{mod } 1).$$

Zeigen Sie: Wenn diese Translation topologisch transitiv ist, dann ist sie **ergodisch** bezüglich dem Lebesgue-Maß auf $[0,1]^n$.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie: Für kein $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ist die Translation aus Aufgabe 1 **mischend** bezüglich dem Lebesgue-Maß auf $[0,1]^n$.

Aufgabe 3:
Sei T die Translation aus Aufgabe 1 mit $n = 2$, sei T topologisch transitiv, und sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} 4^{4^4} \sin(2\pi x)\cos(2\pi y) + (10\sin(2\pi x))^2 - (4\cos(2\pi y))^2 & x \notin \mathbb{Q},\ y \notin \mathbb{Q}, \\ -2009 x^{2008x} + 2008 y^{-2009y} & x \in \mathbb{Q},\ y \notin \mathbb{Q}, \\ 434^{1215} x^{-1345 \arctan y} + 4^{1015} y^{-1145 \tanh x} & x \notin \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}, \\ 6^{6^6} x^{1015 y^x} y^{-1145 x^y} & x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Funktion

$$A_f(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)),$$

d.h. das **Zeitmittel** von f über das positive Semiorbit von x unter T.

Es genügt, die Antwort als Funktion in $L^1(\mu)$ anzugeben (μ =Lebesgue-Maß), d.h. an μ-fast allen Punkten $x \in [0,1]^2$ zu definieren.

Aufgabe 4:
a) Finden Sie 2 verschiedene **Billiards** mit überabzählbar vielen periodischen Orbits der Periode 2.

b) Finden Sie für jedes $n \in 2\mathbb{N}$, $n \geq 4$, ein Billiard mit überabzählbar vielen periodischen Orbits mit derselben Periode n.

Abgabe: nach Belieben