Übungen zur Vorlesung

Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme II

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 1:
Finden Sie eine Abbildung mit positiver **topologische Entropie**, welche keine periodischen Orbits hat. Analog für die **maß-theoretische Entropie**.

Aufgabe 2:
Seien (X_1, μ_1) und (X_2, μ_2) disjunkte Maßräume von Maß 1,

$$f_1 : X_1 \to X_1, \quad f_2 : X_2 \to X_2$$

maßerhaltende Abbildungen darauf und (X, μ) der Maßraum von Maß 1 definiert durch

$$X = X_1 \cup X_2, \quad \mu = \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2.$$

Zeigen Sie: Die maß-theoretische Entropie der Abbildung f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } x \in X_1 \\ f_2(x) & \text{für } x \in X_2 \end{cases}$$

ist

$$h_\mu(f) = \max(h_{\mu_1}(f_1), h_{\mu_2}(f_2)).$$

Aufgabe 3:
Finden Sie die topologische und die maß-theoretische Entropie der Abbildung

$$f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n, \quad [(x_1, \ldots, x_n)] \mapsto [(1x_1, \ldots, nx_n)].$$

Aufgabe 4:
a) Finden Sie für alle $a > 0$ einen Maßraum X mit Gesamtmaß 1, eine Partition P von X und einen Punkt $x \in X$ mit **Information** $I_P(x) = a$.

b) Gibt es für beliebige $a_1, \ldots, a_n > \log n$ eine Partition P und Punkte $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $I_P(x_i) = a_i$ für alle i? Auch für beliebige $a_1, \ldots, a_n > 0$?

c) Bestimmt die **(maß-theoretische) Entropie** einer endlichen Partition die (nichtverschwindenden) Maße der Elemente der Partition? D.h. gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n > 0$ und $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_n > 0$ mit $\sum_{i=1}^n p_i = 1 = \sum_{i=1}^n q_i$ und $(p_1, \ldots, p_n) \neq (q_1, \ldots, q_n)$, so dass für alle Partitionen $P = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ und $Q = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ von X mit $\mu(C_1) = p_1, \ldots, \mu(C_n) = p_n$ und $\mu(D_1) = q_1, \ldots, \mu(D_n) = q_n$ gilt:

$$H(P) = H(Q)?$$

Wenn ja, für welche n?

Abgabe: wann Sie wollen