Prof. Roland Gunesch Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Vorlesung
Dynamische Systeme
Blatt 1

Aufgabe 1:
Untersuchen Sie die Stabilität des Nullpunkts für die Systeme

a) $x \mapsto \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot x$ und

b) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot x$. Warum kommt nicht dasselbe heraus?

Aufgabe 2:
a) Bestimmen Sie die Selbstähnlichkeitsdimension der Cantormenge $C(\lambda)$, die entsteht, wenn aus $[0,1]$ das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda \in (0,1)$ entfernt wird, aus jedem verbleibenden Intervall der Länge L wieder das offene mittlere Intervall der Länge $\lambda L \in (0,1)$ entfernt wird usw.

b) Zeigen Sie: Für jedes $\alpha \in (0,1)$ gibt es eine Cantormenge $C(\lambda) \subset [0,1]$ mit Dimension α.

Aufgabe 3:
a) Konstruieren Sie eine Menge, die zur Standard-Cantormenge homöomorph ist und Box-Dimension 0 hat. (So eine Menge heißt **dünne Cantormenge**).

b) Konstruieren Sie eine Teilenge von $[0,1]$, die zur Standard-Cantormenge homöomorph ist und Box-Dimension 1 hat. (So eine Menge heißt **dicke Cantormenge**).

Beweisen Sie, dass die von Ihnen konstruierten Mengen die geforderten Eigenschaften haben.

Aufgabe 4:
Berechnen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ die Box-Dimensionen der Mengen

$$A_k = \left\{ \frac{1}{n^k} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Abgabe: Dienstag 3.11.2009 in der Vorlesung