Prof. Roland Gunesch Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Vorlesung
Dynamische Systeme
Blatt 2

Aufgabe 1:
a) Ein Maß μ auf X heißt invariant unter der Abbildung f, wenn für alle messbaren Mengen A gilt, dass $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$. Ein endliches Maß μ heißt **ergodisch** bezüglich f, wenn gilt: Es gibt keine invariante Menge A mit $0 < \mu(A) < \mu(X)$.

Zeigen Sie: μ ist ergodisch bzgl. f genau dann, wenn jede Funktion $F \in L^1(\mu)$, die $F \circ f = F$ erfüllt, konstant ist in $L^1(\mu)$.

b) Sei A ein Attraktor. Sei

$$\mu^x(U) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \#\{i \in \{0, \dots T\} : f^i(x) \in U\}.$$

Sei

$$\dim_L(p) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log \mu^x(B_\varepsilon(p))}{\log \varepsilon}$$

die lokale Attraktor-Dimension.

Zeigen Sie: Wenn μ^x ergodisch ist bezüglich f, dann ist die lokale Attraktor-Dimension konstant bis auf eine μ^x-Nullmenge.

Aufgabe 2:
a) Zeigen Sie: Zeigen Sie: Wenn $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz ist, dann gilt für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$, dass

$$\dim_H(T(A)) \leq \dim_H(A).$$

b) Zeigen Sie: Für jede Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt für das α-dimensionale Hausdorff-Maß h^α, dass

$$h^\alpha(\lambda \cdot A) = \lambda^\alpha h^\alpha(A).$$

bitte wenden

Aufgabe 3:
a) Zeigen Sie: Die Hausdorff-Dimension einer Vereinigung ist das Maximum der Hausdorff-Dimensionen der einzelnen Mengen. D.h.: Für alle Mengen $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\dim_H(A_1 \cup A_2) = \max(\dim_H(A_1), \dim_H(A_2)).$$

Diese Eigenschaft heiß „**endliche Stabilität**" der Hausdorff-Dimension.

b) Zeigen Sie: Die Hausdorff-Dimension einer abzählbaren Vereinigung ist das Supremum der Hausdorff-Dimensionen der einzelnen Mengen. D.h.: Für abzählbare Folgen von Mengen $A_i \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$\dim_H\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sup_{i\in\mathbb{N}} \dim_H(A_i).$$

Diese Eigenschaften heißt „**abzählbare Stabilität**" der Hausdorff-Dimension.

Aufgabe 4:
a) Konstruieren Sie eine Menge, deren untere und obere Box-Dimension nicht übereinstimmen.

b) Zeigen Sie: Die untere Box-Dimension hat die obigen Stabilitätseigenschaften nicht. Es gibt Mengen $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$\underline{\dim}_B(A_1 \cup A_2) \neq \max(\underline{\dim}_B(A_1), \underline{\dim}_B(A_2)).$$

Abgabe: Dienstag, 9.11.2009 in der Vorlesung