Prof. Roland Gunesch Wintersemester 2009/2010

Übungen zur Vorlesung
Dynamische Systeme
Blatt 3

Aufgabe 1:
Zeigen Sie: Zu jedem $p \in \mathbb{N}$ und jeder Permutation π von $\{1,\dots,p\}$ gibt es eine stetige Abbildung $f : [0,1] \to [0,1]$, die einen periodischen Punkt x der Periode p hat und so dass gilt

$$x < f^{\pi(1)}(x) < f^{\pi(2)}(x) \cdots < f^{\pi(p-1)}(x).$$

Aufgabe 2:
Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ die **Zeltabbildung**

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1/2 \\ 2-2x & x \geq 1/2. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$: f hat 2^n periodische Punkte der Periode n.

b) Zeigen Sie: Die Menge der periodischen Punkte von f liegt dicht in $[0,1]$.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: Die Abbildung $f : [0,1] \to [0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{77} + \frac{2009 \arctan\left(2 \sinh\left((11 \sin(770\pi x))^{2009}\right)\right)}{(\cos(770\pi x))^{2009} + 2009} & x \leq \frac{76}{77} \\ 1 - 77\left(x - \frac{76}{77}\right) + \frac{2009 \arctan\left(2 \sinh\left((11 \sin(770\pi x))^{2009}\right)\right)}{(\cos(770\pi x))^{2009} + 2009} & x \geq \frac{76}{77}, \end{cases}$$

hat für jedes $q \in \mathbb{N}$ mit $q > 100$ ein periodisches Orbit der Periode q.

bitte wenden

Aufgabe 4:
Sei $V_.(.) : \mathbb{R}^2 \times (-1,1) \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$V_\lambda\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y + \lambda x - xy^2 \\ -x + \lambda y - y^3 \end{pmatrix}$$

und $W_\lambda = -V_\lambda$. Zeigen Sie, dass die Flüsse zu $V_.$ und $W_.$ bei $\lambda = 0$ eine Hopf-Bifurkation haben.

b) Ein Ingenieur möchte ein robustes technisches System bauen. Angenommen, es könnte gewählt werden zwischen zwei Systemen, von denen die Dynamik des ersten Systems durch den Fluss zu diesem V_λ gegeben ist und die Dynamik des zweiten Systems durch den Fluss zu $W_\lambda = -V_\lambda$. Der Anfangswert kann frei gewählt werden, aber nur mit Genauigkeit 10^{-10}. Der Parameter $\lambda = \lambda(t) : [0,\infty) \to (-1,1)$ kann nicht gewählt werden und verändert sich mit der Zeit; bekannt ist nur, dass λ glatt ist (C^∞) und beschränkt durch 1 ist. Das System gilt als robust, wenn für alle glatten $\lambda = \lambda(t)$ das System zu jedem Anfangswert $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in [-1,1]^2$ für alle positiven Zeiten im Bereich $[-1000, 1000]^2$ bleibt. Sollte der Ingenieur $V_.$ oder $W_.$ vorziehen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Abgabe: Freitag, 20.11.2009 in der Vorlesung