Übungen zur Vorlesung
Dynamische Systeme
Blatt 4

Aufgabe 1:
Konstruieren sie einen kompakten metrischen Raum (X, d) und einen topologisch transitiven, expansiven Homöomorphismus $f : X \to X$, so dass es mehrere verschiedene Maße mit maximaler Entropie für f gibt. Geben Sie zwei verschiedene Maße μ, ν an mit

$$h_\mu(f) = h_{\text{top}}(f) = h_\nu(f).$$

Aufgabe 2:
Sei X kompakter topologischer Raum. Für eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von X sei $N(\mathcal{U})$ die kleinste Anzahl der Elemente derjenigen Teilüberdeckungen, welche X noch vollständig überdecken.

a) Zeigen Sie: Die gemeinsame Verfeinerung zweier Überdeckungen erfüllt

$$N(\mathcal{U} \vee \mathcal{V}) \leq N(\mathcal{U}) \cdot N(\mathcal{V}).$$

b) Sei $f : X \to X$ stetig und $\mathcal{U}$ offene Überdeckung von X. Zeigen Sie: Der Limes

$$h(f, \mathcal{U}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N\left(\mathcal{U} \vee f^{-1}(\mathcal{U}) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\mathcal{U})\right)$$

existiert.

Aufgabe 3:
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n > \log n$ gegeben.

a) Zeigen Sie: Es gibt eine Partition P des W-Raums ($[0, 1]$, Lebesgue-Maß), so dass für die Informationsfunktion I_P gilt: Es gibt Punkte $x_1, \ldots, x_n$ mit

$$I_P(x_i) = a_i$$

für alle $i = 1, \ldots, n$.

b) Ist die Bedingung $a_1, \ldots, a_n > \log n$ notwendig? Und gibt es so eine Partition wie in **(a)** auch für beliebige $a_1, \ldots, a_n > 0$?

bitte wenden

Aufgabe 4:
Bestimmt die Information (bzw. maß-theoretische Entropie) einer endlichen Partition schon die Partition (bis auf Maß-Isomorphismus)?

a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt Zahlen

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n > 0$$

und

$$q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_m > 0$$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i = \sum_{i=1}^{m} q_i \log q_i.$$

b) Gilt das auch, wenn $n = m$ und $p_i, q_i \in \{2^{-k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ für alle $i = 1, \ldots, n$?

Abgabe: Dienstag, 15.12.2009 in der Vorlesung