

Mathematik II 13. Übung (16. - 20. 1. 06)
Partielle Differentialgleichungen Teil 2

5. Gegeben sei die homogene Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

mit einer Konstanten $c > 0$.

(a) Wie sind die Parameter $a, b > 0$ zu wählen, damit bei der Variablentransformation

$$\xi(t, x) = x - at, \quad \eta(t, x) = x + bt,$$

die obige PDGL in die Form

$$U_{\xi\eta} = 0$$

übergeht?

(b) Man gebe die allgemeine Lösung $U = U(\xi, \eta)$ der transformierten PDGL an.
Wie lautet damit die allgemeine Lösung $u(t, x)$ der Ausgangs-PDGL?

6. Transformieren Sie die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} &= 0 & \text{für } |x^2 - y^2| &\leq 1 \\ u(x, y) &= x^2 + y^2 & \text{für } |x^2 - y^2| &= 1 \end{aligned}$$

auf Hyperbelkoordinaten.

Hinweis: Hyperbelkoordinaten sind durch die Transformation

$$\mathbf{x}(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} x(\rho, \phi) \\ y(\rho, \phi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \rho \cosh \phi \\ \rho \sinh \phi \end{pmatrix} \quad \text{gegeben.}$$
