

**Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis**

Blatt 3

Abgabetermin: 19.11.2007 vor der Übung

**Aufgabe 1:** (4 Punkte) (Banach'scher Fixpunktsatz) Sei  $(X, d)$  vollständiger metrischer Raum und  $T : X \rightarrow X$  eine kontrahierende Abbildung, d.h.  $T$  sei Lipschitz stetig mit einer Lipschitz Konstanten  $\kappa < 1$ . Weisen Sie nach, dass es genau ein  $x^* \in X$  gibt mit  $T(x^*) = x^*$ , d.h.  $T$  besitzt in  $X$  genau einen Fixpunkt.

**Aufgabe 2:** (4 Punkte) Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $A \subset (C^0(\bar{\Omega}), \|\bullet\|_\infty)$  beschränkt,  $k \in C^0(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$ . Weisen Sie nach, dass die Funktionenmenge

$$\mathcal{B} := \left\{ g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y) dy \text{ für } f \in A \right\}$$

präkompakt in  $C^0(\bar{\Omega})$  ist.

**Aufgabe 3:** (4 Punkte) Sei  $(X, d_X)$  kompakter metrischer Raum,  $(Y, d_Y)$  metrischer Raum,  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Weisen Sie nach, dass  $f$  gleichmäßig stetig ist, d.h.

$$d_Y(f(x), f(y)) \rightarrow 0 \text{ für } d_X(x, y) \rightarrow 0.$$

**Aufgabe 4:** (4 Punkte) Weisen Sie nach, dass  $l^p(\mathbb{K})$  für  $1 \leq p < \infty$  separabel ist,  $l^\infty(\mathbb{K})$  jedoch nicht.