Prof. Dr. M. Hinze WS 2006/2007

**Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis**
Blatt 6
Abgabetermin: 11.12.2006 vor der Übung

**Aufgabe 1**: (4 Punkte) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offenes, beschränktes Gebiet. Es bezeichne

$$X = H_0^1(\Omega) := clos(C_0^\infty(\Omega)) \text{ bzgl. der } H^1-\text{Norm},$$

wobei für eine offene Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ der Raum $C_0^\infty(S)$ die Menge aller $\infty-$ oft auf $S$ differenzierbaren Funktionen $f$ bezeichnet, deren Träger $suppf := \{x \in S; f(x) \neq 0\}$ kompakt in $S$ enthalten ist, kurz $suppf \subset\subset S$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $f \in X'$ genau ein $u \in X$ gibt mit

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \langle f, v\rangle_{X',X} \text{ für alle } v \in X.$$

Die Funktion $u$ heißt dann schwache Lösung des Dirichlet Problems

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega \text{ und } u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

**Aufgabe 2**: Entfällt

**Aufgabe 3**: (4 Punkte (2+2)) (Funktionale auf $C(I)'$). Sei $I = [a, b]$ abgeschlossenes Intervall, $x_i \in I (i = 1, \ldots, n)$ paarweise verschiedene Punkte und $\alpha_i \in \mathbb{R} (i = 1, \ldots, n)$. Weisen Sie nach, dass die nachstehenden Abbildungen stetige, lineare Funktionale auf $C(I)$ definieren und bestimmen Sie deren Norm in $C(I)'$.

a) $T(f) := \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$.

b) $T(f) := \int\limits_0^1 f(x)dx - \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$.

**Aufgabe 4**: (4 Punkte) Weisen Sie nach, dass durch

$$Tf := \int_{-1}^0 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$$

ein stetiges, lineares Funktional auf $X = C^0([-1, 1])$ definiert ist und es kein $f \in X, \|f\|_\infty \leq 1$, gibt, so dass $\|T\|_{X'} = |Tf|$ erfüllt ist.