Partielle Differentialgleichungen

Wolf Hofmann

3. Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung: Der Inhalt der Vorlesung verfolgt drei Ziele.Zunächst wird an Beispielen erklärt,daß partielle Differentialgleichungen mathematische Modelle physikalischer Vorgänge sind. Dies vermittelt ein anschauliches Verständnis für die Eigenschaften der Gleichungen.
In einem zweiten Teil werden die Differentialgleichungen mit klassischen Methoden untersucht, d.h. gestützt auf die aus den Anfängervorlesungen bekannten Begriffe von Funktionen und ihren Ableitungen. Gleichzeitig wird an Beispielen aufgezeigt, warum diese Begriffe zur Beschreibung der auftretenden Phänomene nicht ausreichend sind.
Deshalb wird im dritten Teil der Funktionsbegriff zum Distributionsbegriff verallgemeinert, mit dessen Hilfe sich die Differentialgleichungen, ihre Lösungen und ihre Beziehungen zu realen Problemen beschreiben lassen. Dies gilt sowohl für Differentialgleichungen mit konstanten als auch nichtkonstanten Koeffizienten (Lax-Milgram-Theorie).
Dieses Skript enthält a) eine sehr beschränkte und subjektive Stoffauswahl aus dem Gebiet der Partiellen Differentialgleichungen (PDG) und b) – mit einiger Wahrscheinlichkeit – auch eine Reihe von Fehlern. Aus beiden Gründen ist es ungeeignet, ein Lehrbuch zu ersetzen. Sein Zweck ist es, den Hörer vom Zwang des Mitschreibens zu befreien und sich nicht schon zu Beginn der Vorlesung für ein Buch entscheiden zu müssen. Es entbindet ihn nicht von der Notwendigkeit, den Stoff in Lehrbüchern nachzulesen und zu vertiefen und sich mit der notwendigen Referenzliteratur vertraut zu machen, die es ihm gestattet, Stoffgebiete nachzulesen, die nicht in der Vorlesung behandelt wurden. Auf die im folgenden angeführte Literatur wird im Skript an geeigneten Stellen verwiesen.

Literaturhinweise

Ahlfors L.V.: Complex Analysis, Mc Graw Hill, 1966

Cooper J.M.: Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB, Birkhäuser, 1998

Courant R./Hilbert D.: Meth. d. math. Phys., Heidelberger Taschenb., 1967

Evans L.C.: Partial Differential Equations, Am. Math. Soc., 1998

Folland G.B.: Introd. to PDE's., Princeton Univ.-Press, 1976

Friedmann A.: PDE's of Parab. Type, Prentice-Hall, 1969

Hörmander L.: The Analysis of Lin. Part. Diff. Op. I, Springer, 1990

Jacob N.: Lin. PDGln., Akademie-Verl., 1995

Jantscher L.: Distributionen, De Gruyter Lehrbuch

John F.: PDE's. Springer, 1982

Kamke E.: Part. Dgln., Lösungen u. Lösungsmethoden, Akad. Verlagsgesellsch., 1962

Renardy M./Rogers R.C.: An Introd. to PDE's., Springer., 1993

Stackgold I.: Boundary Val. Probl. of Math. Phys. II, Macmillan Company New York

Strauss W.A.: PDGln., Vieweg, 1992

Szmydt Z.: Fouriertr. and PDE's., D. Reidel Publ. Comp.

Treves F.: Basic Lin. PDE's., Acad. Press, 1975

Triebel H.: Höhere Analysis, Harri Deutsch-Verl., 1972

Tychonoff A.N./Samarski A.A.: Dgln. d. Math. Phys., VEB Dt. Verl. d. Wiss., 1959

Walter W.: Einführung in die Theorie der Distributionen, BI

Walter W.: Einführung in die Potentialtheorie, BI

Kapitel I

Einführung

§ 1 Einleitung

Was ist eine PDG? Einfachste Beispiele

Definition 1.1
Eine PDG ist eine Beziehung zwischen Funktionen, ihren partiellen Ableitungen und den Argumenten dieser Funktionen

$$F(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}),\ u_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, u_{x_n}(\boldsymbol{x}),\ u_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}),\ u_{x_1x_2}(\boldsymbol{x}), \ldots,\ u_{x_nx_n}(\boldsymbol{x}), \ldots) = 0. \tag{1.1}$$

Dabei ist

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B \subseteq \mathbb{R}^n, \quad B \ \text{ ein Gebiet}, \quad u \in C^k(B).$$

$C^k(B) :=$ Menge der Funktionen u, die im Gebiet B definiert und stetig sind samt allen partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k:

$$\begin{aligned}
u_{x_i} &= \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_i = \partial_i u, && i = 1, \ldots, n,\\
u_{x_ix_j} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} = u_{ij} = \partial_i\partial_j u, && i, j = 1, \ldots, n,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
u_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}} &= \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial^\alpha u, && i_\nu \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ für } \nu = 1, \ldots, k,
\end{aligned}$$

mit einem Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,
und seinem Betrag $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = k$.
Der höchste in (1.1) vorkommende Ableitungsgrad k heißt *Ordnung der PDG.*

Satz 1.2
Für $u \in C^k(B)$ hängen die Werte von $\partial_{i_1}\partial_{i_2}\ldots\partial_{i_k}u$ nicht von der Reihenfolge der $i_1,\ldots,i_k$ ab.

Beispiele:

1) Gewöhnliche Differentialgleichungen $(n=1)$.
Man erinnert sich:
$$\sum_{i=0}^{k} a_i \,\frac{d^i u(x)}{dx^i} = f(x).$$
Die allgemeine Lösung (abgesehen von eventuellen singulären Lösungen) war eine Funktion $u \in C^k(B),\ \ B \subset \mathbb{R}$, welche k willkürliche **Integrationskonstanten** enthielt.

2) $n = 2:\ (x_1, x_2) = (x, y)$
$$u_y = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = w(x),$$
d.h. u hängt nicht von y ab. Die Lösung der Differentialgleichung ist eine willkürliche **Funktion** $u = w(x)$, die nur von x abhängt (Schiebefläche).

3)
$$u_{xy} = 0.$$
Durch Integrieren folgt sofort
$$u = \int^{x} w(s)\ ds + v(y)$$
mit 2 willkürlichen, differenzierbaren Funktionen w und v (Problem: $u_{xy} = u_{yx}$).

4)
$$u_{xy} = f(x,y), \quad f \text{ stetig}$$
Als Lösung dieser (inhomogenen) Differentialgleichung erhalten wir die Funktion
$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(\xi,\eta)\ d\eta\ d\xi + w(x) + v(y)$$
mit willkürlichen C^1-Funktionen w und v und Werten x_0, y_0.

5) Die partielle Differentialgleichung.
$$u_x = u_y$$
geht durch die Variablentransformation
$$x + y = \xi, \quad x - y = \eta, \quad u(x,y) = w(\xi,\eta) \quad \text{über in} \quad 2w_\eta = 0,$$
woraus die Lösung $u = v(x+y)$ mit einer willkürlichen Funktion v folgt (vgl. Bsp. 2)).

6) Ist $g \in C^1(B)$ gegeben, so bedeutet die Differentialgleichung

$$u_x g_y - u_y g_x = 0,$$

daß die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(u,g)}{\partial(x,y)}$ von u und g nach x und y verschwindet, d.h. die Lösung u ist von g abhängig (nicht: linear abhängig! vgl. §10). Umgekehrt ist für jede differenzierbare Funktion w auch $u = w(g(x,y))$ Lösung der Differentialgleichung (nachrechnen!).

Fazit: In den Lösungen partieller Differentialgleichungen treten sogar willkürliche Funktionen auf (im Unterschied zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen). Man wird sich also fragen müssen, wie Bedingungen aussehen könnten, die es gestatten, eine Lösung, sofern sie existiert, eindeutig festzulegen. Darum überlegen wir im nächsten Paragraphen, daß PDGn nicht nur eine mathematische Spielerei sind, sondern gewisse Vorgänge beschreiben. Aus der Natur dieser Vorgänge ergeben sich möglicherweise Hinweise, durch welche Vorgaben die Lösung der Differentialgleichungen eindeutig festgelegt werden könnte.

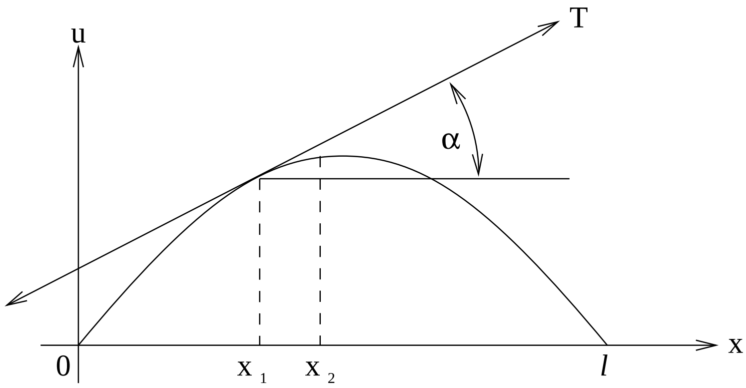
§ 2 Woher kommen PDGn (einfachste Beispiele)?

Kleine Transversalschwingungen einer Saite

(vgl. Tychonoff - Samarski)

Definition 2.1
Eine *Saite* ist ein biegsam-elastischer Faden, der Biegungen keinen Widerstand entgegensetzt (im Gegensatz zu einem Balken).

$u(x,t)$ bezeichne die Auslenkung einer eingespannten Saite der Länge l im Punkt x zum Zeitpunkt t. Wir beschränken uns auf Schwingungen in der (x,u)-Ebene: $u = u(x,t)$ (*transversale Schwingungen*).



Elastische Biegsamkeit bedeutet mathematisch, daß die Saitenspannung T stets in Tangentialrichtung des Saitenprofils zeigt.
„*Kleine*“ Schwingung bedeutet: Der Winkel α ist so klein, daß $\tan^2\alpha$ im Vergleich zu 1 vernachlässigt werden kann $(1+\tan^2\alpha) \approx 1, \quad \tan\alpha = u_x(x_1,t))$.

Damit bedeutet „kleine Schwingung“, daß die Verlängerung eines Saitenstücks (x_1, x_2) bei der Auslenkung vernachlässigt werden kann, denn für die Bögenlänge S gilt dann

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2}\, dx \approx x_2 - x_1.$$

Das *Hook'sche Gesetz* besagt: Die Verzerrungen eines Körpers unter dem Einfluß einer Spannung sind proportional zur Spannung, d.h. hier: die Fadenspannung ist von der Zeit unabhängig, denn da auf Grund unserer Voraussetzung „kleine Schwingung“ keine Verzerrungen stattfinden beim Schwingungsprozess, ändert sich auch die Spannung nicht. (Die Spannung hat hier die Dimension einer Kraft.)

Für die Projektion T_x der Spannung T auf die x-Achse und die Projektion T_u auf die u-Achse gilt dann:
(2.1)
$$T_x(x) = T(x)\ \cos\alpha = \frac{T(x)}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx T(x), \quad \text{da} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}, \quad \tan\alpha = u_x,$$

$$(2.2) \qquad T_u(x) = T(x)\ \sin\alpha = \frac{T(x)u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx T(x)\ u_x, \quad \text{da} \quad \sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}.$$

Auf das Teilchen (x_1, x_2) wirken Spannungskräfte, äußere Kräfte und Trägheitskräfte, deren Projektion auf die x-Achse $= 0$ sein muß (Transversalschwingung!, für die Spannungskräfte folgt dies aus (2.1)), d.h.

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \quad \text{bzw.} \quad T(x_2) = T(x_1) \qquad \text{vgl. (2.1).}$$

Da x_1, x_2 beliebig waren, folgt daraus $T(x) \equiv T_0$ für alle x.

Herleitung der Schwingungsgleichung

Gesetz von der Erhaltung der Bewegungsgröße (*Impulssatz)*: Das Zeitintegral über die wirkende Kraft ist gleich der gesamten Änderung der Bewegungsgröße (Bewegungsgröße =Impuls).
Die gesamte Bewegungsgröße des Elements (x_1, x_2) in u-Richtung zum Zeitpunkt t ist

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\ u_t(\xi, t)\ d\xi, \qquad \rho \mathrel{\widehat{=}} \text{lineare Dichte der Saite} \ \left[\frac{\text{Masse}}{\text{Längeneinheit}}\right].$$

Änderung der Bewegungsgröße in der Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)[u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\ d\xi.$$

Die wirkende Kraft ist die Differenz der Vertikalkomponenten der Spannung plus äußere Kräfte. Bezeichne $f(x, t)$ die zum Zeitpunkt t auf die Längeneinheit bezogene „Kraft im Punkt x“, so folgt für das Zeitintegral der Kraft

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} T_0[u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)]\ d\tau + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi, \tau)\ d\xi d\tau \qquad \text{(vgl. (2.2)).}$$

Damit erhält man die **Gleichung der transversal schwingenden Saite in Integralform**.
(2.3)
$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\ [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\ d\xi = \int\limits_{t_1}^{t_2} T_0[u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)\ d\tau + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi, \tau)\ d\xi d\tau.$$

Setzt man u als zweimal stetig differenzierbar voraus, so erhält man durch Anwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung und des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (hierfür ist $u \in C^2$ erforderlich), Division durch $\Delta t \cdot \Delta x$ und durch den Grenzübergang $x_2 \to x_1 = x,\ t_2 \to t_1 = t$ die Schwingungsgleichung

$$T_0\, u_{xx} = \rho\, u_{tt} - f(x,t), \tag{2.4}$$

bzw.

$$u_{tt} = \frac{T_0}{\rho}\, u_{xx} + \frac{1}{\rho} f(x,t). \tag{2.5}$$

Bemerkungen:

1) Die Voraussetzung $u \in C^2$ bedeutet eine Einschränkung auf 2-mal stetig differenzierbare Lösungen, womit nicht alle realistischen Fälle erfaßt werden können. Dem wird durch Einführung eines allgemeineren Lösungsbegriffes (vgl. §15) Rechnung getragen.

2) Ist die äußere Kraft z.B. eine Reibungskraft und somit proportional zur Geschwindigkeit der Teilchen, $f(x,t) = k\, u_t(x,t)$, so wird (2.5) zu einer Differentialgleichung, die auch Ableitungsterme 1. Ordnung enthält.

3) Mit einer ähnlichen Herleitung erhält man für die Transversalschwingungen einer ebenen Membran die Differentialgleichung

$$u_{tt} = \frac{T_0}{\rho}(u_{xx} + u_{yy}) + f(x,y,t). \tag{2.6}$$

Hierin beschreibt u die Auslenkung eines Punktes zur Zeit t, der in der Ruhelage die Koordinaten (x,y) hat.

4) Der Differentialoperator

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} \tag{2.7}$$

heißt *zweidimensionaler Laplace-Operator*. Entsprechend ist u_{xx} der eindimensionale Laplace-Operator.

5) Führt man in (2.6) eine Streckung in t-Richtung durch: $\tilde{u}(x,y,t) = u(x,y,\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\, t)$, falls $\frac{T_0}{\rho} =$ const., so erhält man die Form

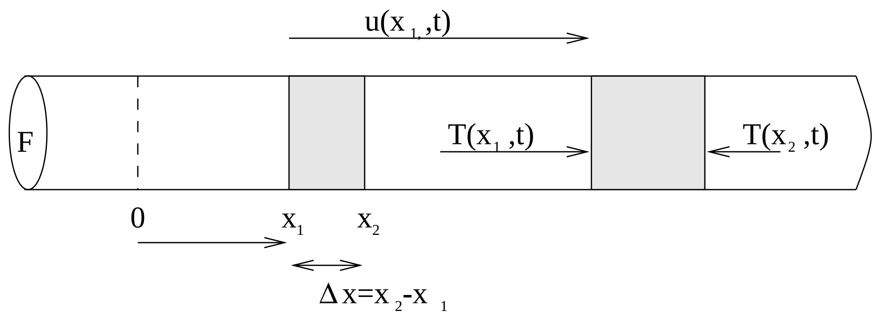
$$\tilde{u}_{tt} - \Delta\tilde{u} = F(x,y,t).$$

Der Operator

$$\Box\, u = u_{tt} - \Delta u \tag{2.8}$$

heißt **Wellenoperator** (vgl. zur Begriffsbildung das Beispiel der Telegraphengleichung). Entsprechend heißt die zugehörige Differentialgleichung **Wellengleichung**.

Longitudinalschwingungen eines Stabes (Saite)



$F =$ Stabquerschnitt, $\quad \rho(x) =$ Materialdichte $\left[\frac{Masse}{Volumen}\right]$ im Abstand x.

Betrachte ein Volumenelement $\Delta V = F\Delta x$, dessen linker Randpunkt in der Ruhelage den Abstand x_1 von Nullpunkt hat.
$u(x,t)$ beschreibt die (Longitudinal-) Verschiebung eines Punktes zur Zeit t, welcher in der Ruhelage die Abzisse x hat.
Wir berechnen zunächst die relative Verlängerung des Elements $(x_1, x_1 + \Delta x)$ unter Einfluß der Spannungen $T(x_1,t), T(x_2,t)$. Die Enden des Elements haben zur Zeit t die Koordinaten $x_1 + u(x_1,t), \quad x_1 + \Delta x + u(x_1 + \Delta x, t)$, somit folgt für die relative Verlängerung

$$\frac{u(x_1 + \Delta x, t) - u(x_1,t)}{\Delta x} = u_x(x_1 + \theta\Delta x, t), \quad 0 \le \theta \le 1 \quad \text{(MWS)},$$

woraus sich durch Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ergibt, daß die relative Verlängerung im Punkt x durch $u_x(x,t)$ festgelegt wird. Nach dem Hook'schen Gesetz gilt somit für die Spannung $\left[\frac{Kraft}{Querschnitt}\right]$

(2.9) $$T(x,t) = k(x)\ u_x(x,t), \qquad (k(x) \widehat{=} \text{Elastizitätsmodul}).$$

Das Gesetz von der Erhaltung der Bewegungsgröße (*Impulssatz)* liefert nun (nach Division durch die als konstant vorausgesetzte Querschnittsfläche F):

(2.10) $$\begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi,t_2) - u_t(\xi,t_1)]\ \rho(\xi)\ d\xi = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2)\ u_x(x_2,\tau) - k(x_1)\ u_x(x_1,\tau)]\ d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi,\tau)\ d\tau d\xi. \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt für alle (t_1,t_2) und (x_1,x_2). Dabei ist $f(x,t)$ die auf die Längeneinheit bezogene Dichte der äußeren Kraft. Setzt man wieder u als zweimal stetig differenzierbar voraus, so erhält man durch Anwendung der Mittelwertsätze und des

Grenzübergangs $x_1 \to x_2 = x,\ t_1 \to t_2 = t$ die Gleichung des longitudinal schwingenden Stabes (Saite)

$$\rho\, u_{tt} = [k(x)\ u_x]_x + f(x,t). \tag{2.11}$$

Ist der Stab homogen, d.h. $k(x) \equiv$ const., so folgt

$$u_{tt} = \frac{k}{\rho}\ u_{xx} + \frac{1}{\rho} f(x,t). \qquad \text{vgl. (2.5)} \tag{2.12}$$

Bemerkung: Die Voraussetzung der zweimaligen Differenzierbarkeit bei der Herleitung der Schwingungs-(Wellen-)gleichung bedeutet zunächst, daß wir uns auf Lösungen mit dieser Eigenschaft beschränken. Das heißt jedoch nicht, daß keine Schwingungsfunktionen existieren, die nicht 2 mal differenzierbar sind (vgl. die Übungsaufgabe zu den nicht differenzierbaren Anfangswerten). Um auch solche Lösungen zu erfassen, kann man zwei Wege einschlagen:

1) Man arbeitet direkt mit der Integralgleichung, oder

2) man benutzt die Differentialgleichung, legt aber einen anderen Lösungsbegriff (schwache Lösung, distributionelle Lösung) zugrunde (vgl. dazu Kapitel IV ff.).

Rand- und Anfangsbedingungen

für Saite und/oder Stab

1) Randbedingungen

Ist eine Saite an beiden Enden fest eingespannt, so gilt offenbar

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.13}$$

Werden ein oder beide Enden nach einem bestimmten Gesetz bewegt, so wird das, in Abhängigkeit von der Zeit, beschrieben durch

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \geq 0, \tag{2.14}$$

mit vorgegebenen Funktionen μ_1 und μ_2.

Wenn ein longitudinal schwingender Stab ein freies Ende hat, z.B. für $x = l$, so herrscht an diesem Ende keine Spannung : $T(l,t) = 0$, d.h. nach (2.9)

$$u_x(l,t) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{2.15}$$

Wird auf das freie Ende in Longitudinalrichtung eine Kraft ausgeübt, die auf den gesamten Querschnitt F wirkt, also eine Spannung, so wird dies (vgl. (2.9)), beschrieben durch

$$u_x(l,t) = \frac{1}{k(l)}\ \nu(t), \qquad t \geq 0, \tag{2.16}$$

mit einer vorgegebenen Funktion ν.

Ist bei einem longitudinal schwingenden Stab ein freies Ende elastisch gelagert, (d.h. es gilt das Hook'sche Gesetz, wonach die Auslenkung proportional ist zur wirkenden Kraft (bzw. Spannung), so gilt mit einer Proportionalitätskonstanten α

$$k(l)\ u_x(l,t) = -\alpha\ u(l,t), \qquad t \geq 0, \tag{2.17}$$

also eine Beziehung zwischen u und u_x.
Beachte: Der Spannung $k\ u_x$ entgegen wirkt die elastische Kraft, welche den Endpunkt $x = l$ nach Auslenkung wieder in die Ruhelage zurück treibt, daher „ $-$ “ αu. α charakterisiert, wie starr die elastische Befestigung ist.

Verschiebt sich der Endpunkt $x = l$ eines longitudinal, schwingenden Stabes in longitudinaler Richtung, z.B. durch eine vorgegebene Bewegung der Befestigung in x-Richtung: $\Theta(t)$, und ist das Ende $x = l$ in der Befestigung elastisch gelagert, so ergibt sich als Gesamtauslenkung unter Einfluß der „elastischen Spannung“ nach (2.17)

$$k(l)\ u_x(l,t) = -\alpha(u(l,t) - \Theta(t)), \qquad t \geq 0. \tag{2.18}$$

Wir haben also folgende 3 Randbedingungen:

RB. 1. Art	$u(0,t) = \mu(t)$	vorgegebene Bewegung (2.14),
RB. 2. Art	$u_x(0,t) = \nu(t)$	vorgegebene Kraft (2.16),
RB. 3. Art	$u_x(0,t) = h(u(0,t) - \Theta(t))$	elastische Befestigung (2.18).

Die Randbedingungen (2.13), (2.15), (2.17) sind die entsprechenden homogenen Randbedingungen. Die Randbedingungen in $x = l$ lauten entsprechend.

2) Anfangsbedingungen
Eine Schwingung ist nicht allein durch die Randbedingungen festgelegt. Es ist einsichtig, daß zum Beispiel die Auslenkung einer Saite zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ die Schwingung beeinflussen wird. Man wird also diese Anfangsauslenkung vorgeben müssen

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \leq x \leq \ell.$$

(große Auslenkung $\rightarrow$ große Schwingung usw.)
Unmittelbar einsichtig ist auch, daß die Schwingung anders ausfallen wird, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ die Saite in Ruhe ist, als wenn sie durch die Anfangslage, die durch obige Gleichung beschrieben wird, mit einer gewissen Geschwindigkeit durchschwingen wird. Im letzten Fall werden die Schwingungsamplituden größer ausfallen. Man wird zur eindeutigen Festlegung einer Schwingung also auch die Geschwindigkeit jedes Teilchens zum Zeitpunkt $t = 0$ vorgeben müssen:

$$u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \leq x \leq \ell.$$

Die Bedingungen

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad u_t(x,0)=\psi(x), \qquad 0\le x\le l, \tag{2.19}$$

heißen *Anfangsbedingungen.*

Wir werden später zeigen, daß die *Anfangsrandwertaufgabe* (ARWA)

z.B. eine Differentialgleichung der Art (2.12)
mit den Anfangsbedingungen (2.19)
und Randbedingungen der Art (2.13)–(2.18) (an jeden Randpunkt eine Bedingung)

eindeutig lösbar ist.

Haben wir z.B. eine unendlich lange Saite, so entfallen natürlich die Randbedingungen, und wir erhalten eine reine *Anfangswertaufgabe* (AWA), bestehend aus einer Differentialgleichung der Art (2.12) und den Anfangsbedingungen $u(x,0)=\varphi(x)$, $\quad u_t(x,0)=\psi(x)$, $-\infty<x<\infty$ mit vorgegebenen Funktionen φ und ψ.

Auch diese Aufgabe wird sich als eindeutig lösbar erweisen.

Die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten zunächst die Wärmemenge Q, die in der Zeit $\triangle t$ durch einen Stab fließt (vgl. Abb.). Dann gilt im stationären Fall (d.h. z.B. wenn beide Enden des Stabes auf konstanter Temperatur gehalten werden, z.B. Eiswasser und kochendes Wasser, so daß sich die Temperaturverteilung längs des Stabes zeitlich nicht ändert) laut experimenteller Erfahrung:

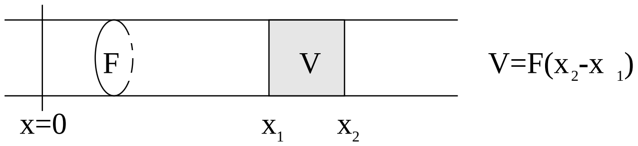
$$Q=\lambda\cdot\frac{(T_1-T_2)\cdot\triangle t\cdot F}{\ell}=\lambda\cdot F\cdot t\cdot\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{2.20}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
T_1-T_2 &\ \widehat{=}\ \text{Temperaturdifferenz an den Stabenden,}\\
\triangle t &\ \widehat{=}\ \text{das Zeitintervall,}\\
F &\ \widehat{=}\ \text{Stabquerschnitt,}\\
\lambda &\ \widehat{=}\ \text{Wärmeleitvermögen (möglicherweise,}\\
&\phantom{\ \widehat{=}\ }\lambda=\lambda(x)\text{ bei einen Stab),}\\
\ell &\ \widehat{=}\ \text{Stablänge,}\\
\frac{T_1-T_2}{\ell}=\frac{\partial T}{\partial x} &\ \widehat{=}\ \text{Temperaturgefälle,}\\
\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x} &\ \widehat{=}\ \text{Dichte des Wärmeflusses.}
\end{aligned}$$

Wir betrachten einen isolierten Stab, der so dünn sein möge, daß die Temperatur T in allen Punkten seines Querschnitts als gleich angesehen werden kann. $T(x,t)$ beschreibe die Temperatur in Stabquerschnitt mit der Abszisse x zur Zeit t.

Idee zur Herleitung der Wärmeleitungsgleichung: Wärmebilanz in einem Volumen V, d.h. wenn Wärme in ein Volumen hineinfließt, wird dieses erwärmt (Energiesatz).



Durch den „Querschnitt F im Punkt x" fließt im Zeitabschnitt dt die Wärmemenge (vgl. (2.20))

$$dQ = F\ \lambda(x)\ \frac{\partial T}{\partial x}\ dt.$$

Durch Integration über einen Zeitabschnitt $t_2 - t_1$ erhält man die gesamte Wärmemenge, welche in diesem Zeitabschnitt durch den Querschnitt F fließt. Während dieser Zeit nimmt das Volumen V die Wärmemenge Q_1 auf.

$$Q_1 = F \int_{t_1}^{t_2} \left[\lambda(x_2)\frac{\partial T}{\partial x}(x_2,\tau) - \lambda(x_1)\ \frac{\partial T}{\partial x}(x_1,\tau)\right] d\tau. \tag{2.21}$$

(das, was einfließt, minus dem, was wieder ausfließt). Innerhalb des Stabes kann Wärme entstehen oder verschwinden (z.B. durch Erhitzen oder Kühlen, oder durch Fließen von Strom). Sei $f(x,t)$ ein Maß für die Wärmemenge pro Einheitvolumen und Zeiteinheit, die zur Zeit t im „Punkt x" entsteht (verschwindet). Im Volumen V entsteht (verschwindet) dann die Wärmemenge Q_2 in der Zeit ($t_2 - t_1$)

$$Q_2 = F \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(\xi,\tau)\ d\xi d\tau.$$

Die Wärmemenge, die einem homogenen Körper zugeführt werden muß, damit sich seine Temperatur um ΔT erhöht, ist gleich

$$Q = c\ \rho\ V\ \Delta T,$$

c ist die spezifische Wärmekapazität des Körpers, ρ seine Dichte, V sein Volumen. Nimmt man an, daß die Temperatur des Stabvolumenstückes an verschiedenen Stellen des Stabes verschieden ist, so bewirken die Wärmemengen Q_1 und Q_2 eine Temperaturerhöhung, welche durch die Wärmemenge Q_3 beschrieben wird.

$$Q_3 = F \int_{x_1}^{x_2} c\rho\ [T(\xi,t_2) - T(\xi,t_1)]\ d\xi. \tag{2.22}$$

Nach dem *Energiesatz*: $Q_1 + Q_2 = Q_3$ erhält man (nach Division durch F) die

Gleichung der Wärmeleitung in Integralform

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \left[\lambda(x_2)\frac{\partial T}{\partial x}(x_2,\tau) - \lambda(x_1)\,\frac{\partial T}{\partial x}(x_1,\tau)\right] d\tau + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(\xi,\tau)\; d\xi d\tau = \tag{2.23}$$
$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} c\rho\,[T(\xi,t_2) - T(\xi,t_1)]\;\, d\xi.$$

Sei T zweimal stetig differenzierbar. Dann folgt aus (2.23) mit den Mittelwertsatz der Integralrechnung (mit $\Delta t = t_2 - t_1,\ \Delta x = x_2 - x_1$)

$$\left[\lambda(x_2)\frac{\partial T}{\partial x}(x_2,\tilde t_1) - \lambda(x_1)\frac{\partial T}{\partial x}(x_1,\tilde t_1)\right]\Delta t + f(\tilde x_1,\tilde t_2)\ \Delta x\Delta t =$$
$$= c\rho\,[T(\tilde x_2,t_2) - T(\tilde x_2,t_1)]\,\Delta x,$$

und hieraus mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(\tilde x_3)\ \frac{\partial T}{\partial x}(\tilde x_3,\tilde t_1)\right]\Delta t\Delta x + f(\tilde x_1,\tilde t_2)\Delta x\Delta t = c\rho\frac{\partial T}{\partial t}(\tilde x_2,\tilde t_3)\Delta x\Delta t.$$

Nach Division durch $\Delta x\Delta t$ und Grenzübergang $\tilde t_i \to t,\ \tilde x_i \to x$ (alle Punkte und Zeiten waren beliebig) folgt die (eindimensionale)

Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda T_x) + f(x,t) = c\rho T_t \quad \text{bzw.:} \quad T_t = \frac{\lambda}{c\rho}T_{xx} + \frac{1}{c\rho}f(x,t) \quad \text{falls} \quad \lambda = \text{const}\,. \tag{2.24}$$

Bemerkung: Die Diffusion von Gasen genügt derselben Gleichung, (oft mit $f \equiv 0$) weshalb auch der Name Diffusionsgleichung gebräuchlich ist.

Rand- und Anfangsbedingungen

1) Randwerte

Der Temperaturverlauf im Stabinnern hängt offensichtlich von den Temperaturen am Stabende ab. Diese kann man als Funktionen der Zeit vorschreiben, z.B. durch Kühlung und Erhitzung. μ_1, μ_2 seien gegebene Funktionen.

$$T(0,t) = \mu_1(t), \quad T(\ell,t) = \mu_2(t), \qquad t \geq 0. \tag{2.25}$$

Ist an einem Stabende der Wärmefluß durch den Querschnitt F pro Zeiteinheit vorgegeben (vgl. (2.20)), erhält man Randbedingungen der Art (2.16)

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x}(\ell,t) = \mu_3(t) \quad , \quad t \geq 0, \quad \mu_3 \text{ vorgegeben.} \tag{2.26}$$

Steht ein Stabende im freien Wärmeaustausch mit der Umgebung, deren Temperatur $\Theta(t)$ bekannt ist, so ist der Wärmefluß durch den Querschnitt bei $x = \ell$ proportional zur Temperaturdifferenz zwischen Stab und Umgebung. Er wird durch $\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$ beschrieben, woraus sich als RB ergibt

$$(2.27) \qquad \frac{\partial T}{\partial x}(\ell, t) = k\,(T(\ell, t) - \Theta(t))\,, \quad t \geq 0,\; k = \text{const}\,. \quad (\text{vgl. } (2.18))$$

Wir haben also dieselben Randbedingungen wie bei der Wellengleichung.

2) Anfangswerte

Zweifellos hängt der Temperaturverlauf im Stabinnern von der Anfangstemperaturverteilung zu einem festen Zeitpunkt $t = 0$ ab, die man angeben muß.

$$(2.28) \qquad T(x, 0) = \nu(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad \nu \text{ vorgegeben.}$$

Eine „Geschwindigkeitsvorgabe“ für die Temperatur erscheint physikalisch nicht sinnvoll (im Gegensatz zur schwingenden Saite), da die zeitliche Änderung der Temperatur a) von den Materialcharakteristiken c, ρ, λ abhängt und b) äußere Einflüsse durch die Funktion $f(x, t)$ schon beschrieben sind. Tatsächlich kann man zeigen, daß die Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch Randbedingungen der Art (2.25) oder (2.26) oder (2.27) und durch eine Anfangsbedingung (2.28) bereits eindeutig festgelegt ist. So eine Aufgabe bezeicnen wir als **Anfangsrandwertaufgabe: ARWA.**

Betrachtet man die Wärmeleitung in einem sehr langen Stab, so erscheinen im Verlauf hinreichend kleiner Zeitintervalle die Einflüsse der Randbedingungen auf ein mittleres Stabstück sehr gering. Mathematisch trägt man dem Rechnung durch Annahme eines unendlich langen Stabes und Vorgabe der reinen Anfangswerte (2.28) für $-\infty < x < +\infty$. Dies ist die **Anfangswertaufgabe: AWA** (Cauchy-Problem) der Temperaturverteilung. Auch diese Aufgabe ist eindeutig lösbar.

Bevor wir uns mit der Herleitung der 3. wichtigen Differentialgleichung der mathematischen Physik beschäftigen können, müssen wir uns – zumindest abrißweise – mit der Definition und Bedeutung einiger partieller Differentialoperatoren befassen. Demzufolge heißt der nächste Abschnitt

§ 3 grad, div, rot, Gauß, Green, Stokes

Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Dann wird der **Gradientenoperator** definiert durch

$$\operatorname{grad} u(\bar{\boldsymbol{x}}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ \ldots \ , \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}} . \tag{3.1}$$

Satz 3.1

a) In jedem Punkt $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ wird durch $\operatorname{grad} u(\bar{\boldsymbol{x}})$ die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion gegeben.

b) grad $u(\bar{\boldsymbol{x}})$ steht senkrecht auf der Tangentialebene der Fläche $u(\boldsymbol{x}) = c$ im Punkt $\bar{\boldsymbol{x}}$.

geometrische Bedeutung des Gradienten

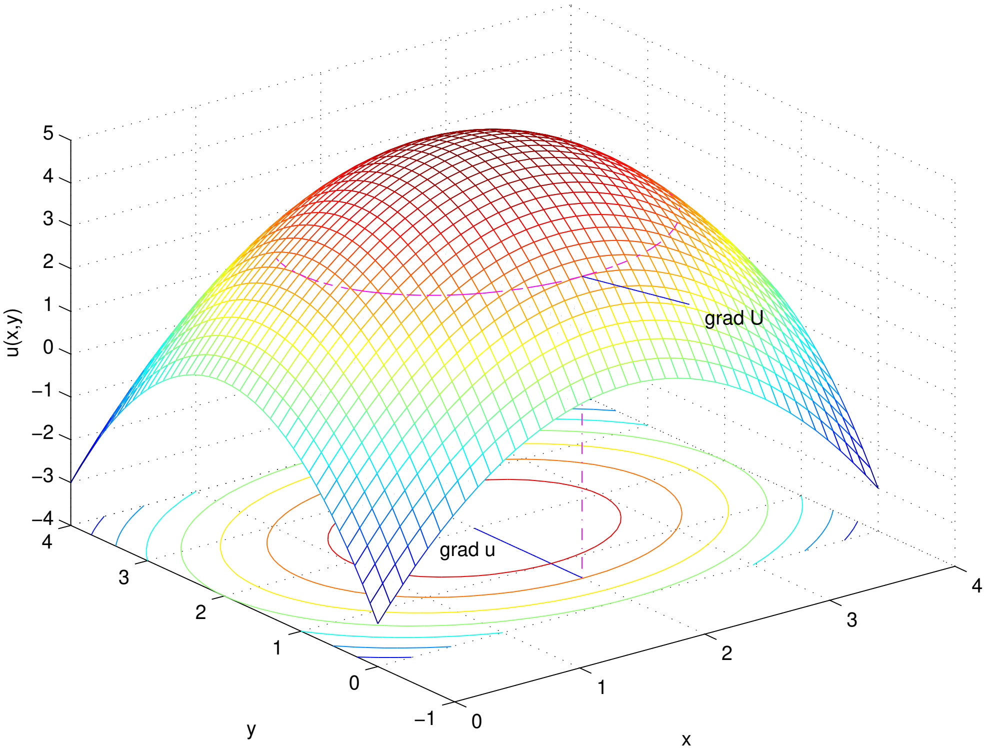
n = 2 : $x_3 = u(x_1, x_2)$ beschreibt eine eine Fläche F im $\mathbb{R}^3$. $u(x_1, x_2) = u(\bar{\boldsymbol{x}})$ ist die Höhenlinie $N_{\bar{\boldsymbol{x}}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2; u(\boldsymbol{x}) = u(\bar{\boldsymbol{x}})\}$.

$$\forall \boldsymbol{x} \in N_{\bar{\boldsymbol{x}}} : \operatorname{grad} u(\bar{\boldsymbol{x}}) \perp \text{ Tangente an } N_{\bar{\boldsymbol{x}}} \text{ in } \bar{\boldsymbol{x}}.$$

n = 3 : $U(x_1, x_2, x_3)) := x_3 - u(x_1, x_2) = 0$ beschreibt ebenfalls die Fläche F, sie ist die Äquipotentialfläche $N_0 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3; U(\boldsymbol{x}) = 0\}$. $\operatorname{grad} U(\boldsymbol{x}) \perp$ alle Kurven auf F durch $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$

d.h. $$\operatorname{grad} U(\boldsymbol{x}) \perp \text{ Tangentialebene an F in } \boldsymbol{x} .$$

F: $x_3 = u(x_1, x_2)$



Beweis a)
Sei $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor der Länge 1. Dann ist die Ableitung von u in Richtung $\boldsymbol{e}$ (**Richtungsableitung**) definiert durch

$$(3.2) \qquad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{e}} = \lim_{t \to 0} \frac{u(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}) - u(\boldsymbol{x})}{t} = (\operatorname{grad} u(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{e}, \quad \text{(Skalarprodukt)}.$$

Zum Beweis von (3.2) erinnern wir uns an die

Definition 3.2
u heißt *differenzierbar* an der Stelle $\bar{\boldsymbol{x}}$, falls

$$u(\boldsymbol{x}) = u(\bar{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\bar{\boldsymbol{x}}) \cdot (x_i - \bar{x}_i) + o(|\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}|),$$
$$\text{mit } \lim_{\boldsymbol{x} \to \bar{\boldsymbol{x}}} \frac{o(|\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}|)}{|\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}|} = 0.$$

Aus $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{e}$ folgt $u(\bar{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{e}) - u(\bar{\boldsymbol{x}}) = t(\operatorname{grad} u(\bar{\boldsymbol{x}}))\boldsymbol{e} + o(t|\boldsymbol{e}|)$, woraus sich sofort (3.2) ergibt.

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung folgt für alle Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}}\right| = |(\operatorname{grad} u) \cdot \mathbf{e}| \leq |\operatorname{grad} u| \underbrace{|\mathbf{e}|}_{=1} = |\operatorname{grad} u|.$$

Die Gleichheit gilt offensichtlich, falls $\mathbf{e} = \pm \dfrac{\operatorname{grad} u}{|\operatorname{grad} u|}$ und mit „ + “ sogar ohne Betragsstriche, was zu zeigen war.

Beweis b)
Die Tangentialebene von $u(\boldsymbol{x}) = c$ im Punkt $\bar{\boldsymbol{x}}$ wird aufgespannt durch die Tangentialvektoren der auf dieser Fläche verlaufenden Kurven durch den Punkt $\bar{\boldsymbol{x}}$. So eine Kurve sei gegeben durch

$$(3.3) \qquad x_i = x_i(\tau), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \tau \in I, \quad u(x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau)) = c$$

Der Tangentenvektor $\boldsymbol{t}$ im Punkt $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(\bar{\tau})$ ist gegeben durch

$$\boldsymbol{t} = (\dot{x}_1(\bar{\tau}), \ldots, \dot{x}_n(\bar{\tau}))^T, \quad \text{mit} \quad \dot{x}_i(\bar{\tau}) = \frac{dx_i(\bar{\tau})}{d\tau}.$$

Durch Differentiation von $u(\boldsymbol{x}) = c$ folgt aus (3.3)

$$\frac{d}{d\tau} u(x_1(\bar{\tau}), \ldots, x_n(\bar{\tau})) = 0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\bar{\boldsymbol{x}})}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i(\bar{\tau})}{d\tau} = (\operatorname{grad} u(\bar{\boldsymbol{x}})) \cdot \boldsymbol{t},$$

also steht $\operatorname{grad} u$ auf allen Tangentialvektoren senkrecht. ■

Arbeit und Potential

Im $\mathbb{R}^3$ sei ein Kraftfeld vorgegeben:

$$\mathbf{k}(\boldsymbol{x}) = (k_1(\boldsymbol{x}), k_2(\boldsymbol{x}), k_3(\boldsymbol{x})), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$$

(Beispiele: Gravitationskraft; Kraft, die durch ein elektrisches Feld auf eine Ladung ausgeübt wird).
Wird ein Körper gegen diese Kraft, der er ausgesetzt ist, um ein geradliniges Wegstück $\mathbf{s}$ verschoben, so wird eine Arbeit A geleistet, welche durch das Produkt $A = |\mathbf{k}| \cdot |\mathbf{s}|$ gegeben wird, falls die Kraft $\mathbf{k}$ und der Weg $\mathbf{s}$ gleichgerichtet sind. Ist das nicht der Fall, kommt für die Arbeit nur der Teil der Kraft in Betracht, der in Wegrichtung wirkt: $A = \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}$ (Skalares Produkt). Ist die Kraft wegabhängig und der Weg nicht geradlinig, erhält man die Arbeit, welche geleistet werden muß, um den Körper längs eines Weges

$$\boldsymbol{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(t), \quad t \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{s}(a) = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{s}(b) = \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{s} \in C^1([a, b])$$

vom Punkt $\boldsymbol{x}$ zum Punkt $\boldsymbol{y}$ zu bringen durch

$$A = \int_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{k} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_a^b \boldsymbol{k}(\boldsymbol{s}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\boldsymbol{s}(t)\, dt. \tag{3.4}$$

Wenn ein Kraftfeld so beschaffen ist, daß es gleichgültig ist, auf welchem Weg der Körper von $\boldsymbol{x}$ nach $\boldsymbol{y}$ gebracht wird, heißt das Kraftfeld konservativ (d.h. die Arbeitsenergie bewahrend). Mathematisch bedeutet dies, daß das Integral (3.4) vom speziellen Weg unabhängig ist. Physikalisch findet dies seine Auswirkung darin, daß man jedem Ort eine Zahl zuordnen kann, ein Potential. Das ist eine skalare Ortsfunktion $U(\boldsymbol{x})$, die beschreibt, welche Arbeit geleistet werden muß, um einen Einheitskörper von einem Bezugspunkt an den festgelegten Ort zu bringen.
Die Arbeit $\mathbf{k} \cdot d\mathbf{s}$ einer kleinen Verschiebung $d\mathbf{s}$ entspricht der Potentialdifferenz

$$dU = (\operatorname{grad} U) \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{k} \cdot d\mathbf{s}.$$

Dies legt den Verdacht nahe, daß

1) ein konservatives Kraftfeld sich als Gradient eines Skalarfeldes (Potential) darstellen läßt und

2) dann das Wegintegral der Kraft vom speziellen Weg unabhängig ist.

Beides ist richtig, denn es gilt:

Definition 3.3
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbb{V}^n$ der Raum der n-dimensionalen Vektoren, und $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{V}^n$ ein Vektorfeld.
Existiert dann eine Funktion $\varphi \in C^1(D)$ mit

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in D, \tag{3.5}$$

so heißt φ ein *Potential* von $\boldsymbol{v}$.

Satz 3.4
Ist $\boldsymbol{v} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{V}^n$, D offen und konvex, $\boldsymbol{v} \in C^1(D, \mathbb{V}^n)$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) $\boldsymbol{v}$ besitzt ein Potential.
(2) Das Kurvenintegral bzgl. $\boldsymbol{v}$ ist wegunabhängig.

Die Rotation und der Satz von Stokes

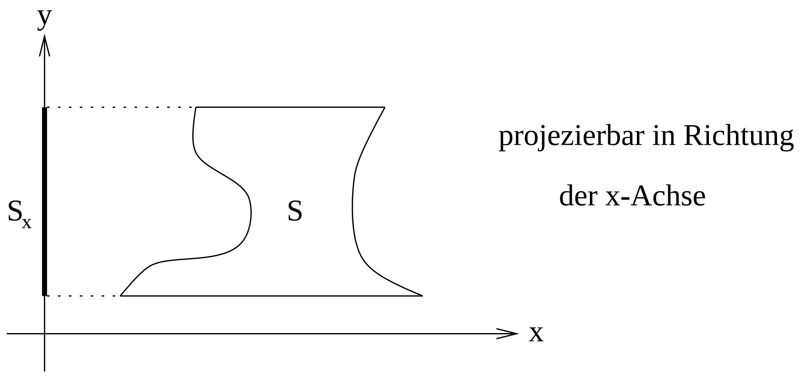
Die Entscheidung, ob das Linienintegral bzgl. eines Kraftfelds φ wegunabhängig ist, ist gleichwertig mit dem Auffinden einer Stammfunktion gemäß (3.5). Es stellt sich die Frage, ob man nicht direkt am Kraftfeld ablesen kann, ob das Integral wegunabhängig ist, d.h. wann ist $\int\limits_k \boldsymbol{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$ für jeden geschlossenen Weg k?
Diese Frage wird beantwortet durch den Stokesschen Integralsatz. Um ihn zu zitieren, benötigen wir die

Definition 3.5
Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt *projezierbar* in Richtung der x_ν-Achse, wenn es im $(n-1)$-dimensionalen $(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$ -Raum eine meßbare Menge S_{x_ν} und auf S_{x_ν} zwei Funktionen $\underline{x}_\nu$, $\bar{x}_\nu \in C^1(S_{x_\nu})$ gibt so, daß mit
$\boldsymbol{x}^\nu = (x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n)$

$$\bar{S} = \bigcup_{\boldsymbol{x}^\nu \in S_{x_\nu}} \{(x_1, \ldots, x_n) : \ \underline{x}_\nu(\boldsymbol{x}^\nu) \leq x_\nu \leq \bar{\boldsymbol{x}}_\nu(\boldsymbol{x}^\nu)\}.$$

Eine beschränkte Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Standardbereich*, wenn sie für jedes $\nu = 1, 2, \ldots, n$ in Richtung der x_ν-Achse projezierbar ist.

Beispiel:



Satz 3.6 Stokesscher Integralsatz

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und $\boldsymbol{v} : D \to \mathbb{V}^3$, $\boldsymbol{v} \in C^2(D)$, ein Vektorfeld.

Seien $x_i \in C^1(S)$, $i = 1, 2, 3$; $S \subset \mathbb{R}^2$ und $Rg \dfrac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u, v)} = 2$.

Dann wird durch

$$F = \{(x_1, x_2, x_3); \quad x_i = x_i(u, v), \quad (u, v) \in S\}$$

eine Fläche beschrieben, die in D enthalten sein möge. G sei ein Flächenstück auf F, dessen Urbild in der Parameterebene ein Greenscher Bereich ($\widehat{=}$ läßt sich in endlich viele Standardbereiche zerlegen) ist.

Dann gilt

$$\int_G (\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{\nu} \, do = \int_{\partial G} \boldsymbol{v} \cdot d\mathbf{s}, \tag{3.6}$$

$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ = äußere Normale der Fläche G im Punkt $\boldsymbol{x}$, $do =$ Oberflächenelement, und

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \quad \text{für} \quad \boldsymbol{x} \in G. \tag{3.7}$$

Merkregel: $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$.

Dabei sind $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ die Einheitsvektoren in Richtung der x_1, x_2 bzw. x_3-Achse.

Dieser Satz legt die Vermutung nahe, daß das Wegintegral über $\boldsymbol{v}$ wegunabhängig ist, falls $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ überall verschwindet. Tatsachlich gilt der

Satz 3.7
Sei $\boldsymbol{v} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}^3$, D offen und konvex, $\boldsymbol{v} \in C^2(D, \mathbb{V}^3)$, ein Vektorfeld, so sind äquivalent

1. $\boldsymbol{v}$ besitzt ein Potential
2. $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$ auf D.

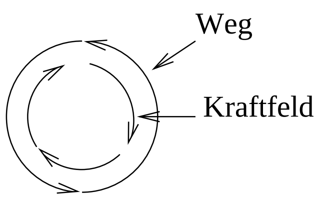
Bemerkungen :

1) Die Sätze und Definitionen (3.3) - (3.7) finden sich im Endl/Suh : Analysis II. Sie sind auch unter schwächeren (Differenzierbarkeits-) Voraussetzungen gültig.

2) Wendet man auf (3.6) den Mittelwertsatz an, so folgt,

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\tilde{\boldsymbol{x}})) \cdot \boldsymbol{\nu}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{|G|} \int_{\partial G} \boldsymbol{v}\, d\mathbf{s}$$

d.h. wird $\boldsymbol{v}$ als Kraftfeld interpretiert, so läßt sich die Normalkomponente von $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ deuten als die Arbeit, die verrichtet werden muß, wenn der Einheitskörper längs ∂G einmal „rund um $\tilde{\boldsymbol{x}}$ rumgeschoben“ wird, bezogen auf den Inhalt der umlaufenen Fläche.
Anschaulich: Wenn das Kraftfeld einen Wirbel aufweist, muß dazu eine Arbeit geleistet werden.



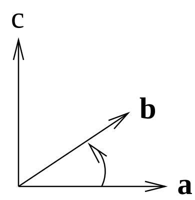
3) **Veranschaulichung von rot $\boldsymbol{v}$**

(a) Erinnerung: Für Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ist das

$$\textbf{Vektorprodukt} \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sind die Einheitsvektoren in Richtung der x_1, x_2 bzw. x_3-Achsen.

Es hat folgende Bedeutung:
In der durch $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Ebene drehe man $\mathbf{a}$ auf kürzesten Wege in $\mathbf{b}$. Dann steht $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ senkrecht auf $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, derart daß $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ein Rechtssystem bilden (Korkenzieherregel).
Für den Betrag gilt $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\, |\mathbf{b}|\, \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.



Durch Nachrechnen zeigt man sehr schnell

i. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \ + \ \mathbf{a} \times \mathbf{d}$ Distributivität

ii. $\alpha\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \alpha\mathbf{b}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$ Skalarmultiplikation

iii. $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$

iv. Für $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ bestätigt man durch distributives Ausrechnen (vgl. obige Definition)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Es soll nun die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes berechnet werden, welches die Geschwindigkeit der Punkte eines starren Körpers beschreibt, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine feste Achse, die durch den Vektor $\boldsymbol{o} = (p, q, r)$ gegeben ist, dreht.

Ist $|\boldsymbol{o}| = \omega \mathrel{\widehat{=}}$ Winkelgeschwindigkeit, gemessen in $\left[\dfrac{\text{Bogenmaß}}{\text{Zeit}}\right]$, so heißt $\boldsymbol{o}$ Drehvektor.

Ist $\boldsymbol{x}$ der Ortsvektor eines Punktes $\boldsymbol{x}$ des Rotationskörpers, so ergibt sich die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ des Punktes $\boldsymbol{x}$ als

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \times \boldsymbol{x}$$

(vgl. die Definition von $\boldsymbol{o} \times \boldsymbol{x}$ und beachte, daß $|\boldsymbol{x}| \sin(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{x})$ der Abstand des Punktes $\boldsymbol{x}$ von der Drehachse ist). Mit $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ gilt (vgl.(a))

$$\boldsymbol{o} \times \boldsymbol{x} = (qx_3 - rx_2,\ rx_1 - px_3,\ px_2 - qx_1).$$

Berechnet man nun $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{o} \times \boldsymbol{x})$ gemäß (3.7), so folgt

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{o}.$$

Bis auf den Faktor 2 ist die Rotation gleich dem Drehvektor, der das Geschwindigkeitsfeld festlegt. Hieraus erklärt sich auch seine Bezeichnung „Rotation“ (rot, auf englisch: curl).

Dieses Beispiel macht deutlich, daß $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$ bedeutet, daß das Vektorfeld keine Wirbel hat.

Die Divergenz und der Satz von Gauß

Gegeben sei ein Vektorfeld $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\boldsymbol{v} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}^3$, das wir als Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeitsströmung interpretieren. Dann kann man fragen, welche Flüssigkeitsmenge (Volumen) pro Zeiteinheit durch eine gegebene Fläche fließt. Sie ist offensichtlich abhängig von der Stellung der Fläche zur Strömungsrichtung. Ist $d\boldsymbol{f}$ der Flächennormalvektor eines Flächenstücks, dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt ist, so wird das Volumen der pro Zeiteinheit durch die Fläche fließenden Menge durch

$$\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{f} = |\boldsymbol{v}|\,|d\boldsymbol{f}|\,\cos(\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{f})$$

beschrieben, d.h. maßgeblich für die durchfließende Menge ist die zur Fläche F senkrechte Komponente $\boldsymbol{v}_\perp$ von $\boldsymbol{v}$ oder die Projektion $\tilde{F}$ der Fläche auf eine Ebene senkrecht zur Strömungsrichtung: $\tilde{F} = \triangle F \cos\alpha$, $\alpha = \angle(\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{f})$.

Ist τ ein Volumen mit der Oberfläche F und $d\boldsymbol{f}$ die äußere Flächennormale, so wird durch

$$D = \frac{1}{\tau} \int_F \boldsymbol{v} \cdot d\mathbf{f} \tag{3.8}$$

die auf das Volumen τ bezogene Differenz der in das Volumen τ ein- und ausfließenden Flüssigkeit beschrieben. Die herausfließende Flüssigkeit wird positiv gerechnet, da $\angle(\boldsymbol{v}, d\mathbf{f}) < 90^0$, also $\cos\alpha > 0$. Wenn aus τ mehr raus (rein) als rein (raus) fließt, enthält τ eine Quelle (Senke). D ist deshalb ein Maß für die Ergiebigkeit (Divergenz) des Volumenstückchens τ. Die **Divergenz** ($\widehat{=}$ Ergiebigkeit des Feldes im Punkt $\boldsymbol{x}$) ist der Grenzwert, den man erhält, wenn man das Volumenstück auf einen Punkt $\boldsymbol{x}$ zusammenzieht.

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \int\limits_F \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{f} =: \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}). \tag{3.9}$$

Man kann zeigen, daß dieser Grenzwert tatsächlich existiert und im Wesentlichen von der Gestalt von τ unabhängig ist, und man kann zeigen, ausgehend von (3.9), daß in einem rechtwinkligen Koordinationssystem im $\mathbb{R}^3$, falls $\boldsymbol{v} \in C^1(D, \mathbb{V}^3)$, folgende Darstellung gilt

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial v_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3(\boldsymbol{x})}{\partial x_3}. \tag{3.10}$$

Diesen Weg wollen wir hier jedoch nicht beschreiten, sondern uns im Wesentlichen mit der Angabe des Satzes von Gauß begnügen.

Um uns nicht mit den Voraussetzungen an das Gebiet abplagen zu müssen, für das der Gaußsche Satz gilt, erklären wir:

Definition 3.8
Ein *Normalgebiet* ist ein beschränktes Gebiet, das so beschaffen ist, daß der folgende Satz gilt.

Satz 3.9 Gaußscher Integralsatz

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet, $u \in C^0(\bar{G}) \cap C^1(G)$ und außerdem $u_{x_i} \in L(G)$, dann ist

(3.11) $$\int\limits_G u_{x_i}\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial G} u \cdot \nu_i\, do, \quad i = 1, \ldots, n$$

wobei $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ die äußere Normale (das ist ein Einheitsvektor) der Randfläche ∂G ist.

Hieraus folgt sofort für eine Vektorfunktion
$\boldsymbol{v} \in C^0(\bar{G}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(G, \mathbb{R}^n)$ mit $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L(G), \quad i, j = 1, \ldots, n$:

(3.12) $$\int\limits_G \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial G} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu}\, do,$$

wobei

(3.13) $$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}.$$

Bemerkungen:

1) Beispielsweise ist jede endliche Vereinigung von Standardbereichen (vgl. Definition 3.5) ein Normalgebiet.

2) Wendet man auf (3.12) den Mittelwertsatz an, so erhält man unmittelbar die Verbindung zu (3.9) und (3.10).

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes lassen sich die im nächsten Satz zitierten Greenschen Formeln beweisen (Übung).

Satz 3.10 Greensche Formeln
Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet, $u, v \in C^1(\bar{G}) \cap C^2(G)$, $\Delta u, \Delta v \in L(G)$.
Dann gilt die

1. Greensche Formel

$$\int\limits_G (u\Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v)\ d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial G} u\ (\operatorname{grad} v)\ \cdot \boldsymbol{\nu}\ do, \quad \boldsymbol{\nu} = \text{äußere Normale}$$

und die

2. Greensche Formel

$$\int\limits_G (u\Delta v - v\Delta u)\ d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial G} (u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}})\ do.$$

Die Kontinuitätsgleichung und die Potentialgleichung

Die Kontinuitätsgleichung beschreibt die Stoffbilanz in einem Volumen τ, das von einem Stoff (z.B. einer Flüssigkeit) durchflossen wird. Modellierungsgrundlage: Masseerhaltungsgesetz. Sei

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) :\ D\ (\subset \mathbb{R}^3) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ein Vektorfeld, das die Fließgeschwindigkeit einer Flüssigkeit beschreibt und ρ ihre spezifische Dichte. Mit $\triangle F$ bezeichnen wir ein Oberflächenstück von τ mit dem Normalenvektor $d\boldsymbol{f}$, $|d\boldsymbol{f}|$ ist der Flächeninhalt von $\triangle F$.
Durch $\triangle F$ fließt pro Zeiteinheit die Menge

$$dQ = \rho\ |\boldsymbol{v}|\ \triangle F\ \cos\alpha = \rho\ \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{f},\ \ \alpha = \angle(\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{f}) \qquad \text{(Skalarprodukt).}$$

Damit gilt für die Differenz Q_1 der Flüssigkeiten, die pro Zeiteinheit aus einem Volumen τ durch die Oberfläche F heraus- bzw. hineinfließen (vgl. (3.8))

$$Q_1 = \int\limits_F \rho\, \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{f} = \int\limits_F \rho\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nu}\, do, \quad \boldsymbol{\nu} = \text{ äußere Normale.} \tag{3.14}$$

Die ausströmende Flüssigkeit wird positiv gerechnet, da dann $\angle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\nu}) < 90^0$, also $\cos\alpha > 0$.
Die Flüssigkeit in τ wird gegeben durch

$$Q_2 = \int\limits_\tau \rho\, d\boldsymbol{x}. \tag{3.15}$$

Wird ρ als differenzierbar vorausgesetzt und sind in τ weder Quellen noch Senken vorhanden, so fließt in der Zeit dt die Flüssigkeitsmenge

$$-dt \int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\, d\boldsymbol{x}$$

heraus, d.h. in der Zeiteinheit fließt heraus:

$$Q_3 = -\int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\, d\boldsymbol{x}. \tag{3.16}$$

Es fließt etwas heraus, wenn ρ abnimmt, und herausfließende Mengen werden als positiv vereinbart, daher $Q_3 = -\int\int\int$.
Sind weder Quellen noch Senken vorhanden, so gilt nach dem Massenerhaltungsgesetz $Q_1 = Q_3$:

$$\int_F \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}\, do = -\int_\tau \frac{\partial\rho}{\partial t}\, d\boldsymbol{x}.$$

Nach dem Satz von Gauß (Satz 3.9)

$$\int_{\partial G} \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}\, do = \int_G \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})\, d\boldsymbol{x},$$

geht diese Gleichung über in

$$\int_\tau \left(\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) d\boldsymbol{x} = 0.$$

Da dies für jedes Volumen gilt, muß gelten

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \qquad \textbf{Kontinuitätsgleichung} \tag{3.17}$$

Insbesondere gilt für inkompressible Flüssigkeiten (ohne Quellen und Senken, $\rho =$ const.)

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0. \tag{3.18}$$

Ist diese Flüssigkeitsströmung wirbelfrei $(\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0)$, so ist $\boldsymbol{v}$ als Gradient eines Geschwindigkeitspotentials φ darstellbar: $\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi$ (vgl. Satz 3.7). Wird das in (3.18) eingesetzt, so folgt

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \varphi_{x_1x_1} + \varphi_{x_2x_2} + \varphi_{x_3x_3} = \Delta\varphi = 0 \quad \textbf{Potentialgleichung}. \tag{3.19}$$

Um genauere Einblicke in die Potentialgleichung zu erhalten, betrachten wir nochmals die

räumliche Wärmeleitung

Wenn wir uns nicht auf den 1-dimensionalen Fall beschränken, muß man die Richtung des Wärmeflusses berücksichtigen.

Gesetz von Fourier: Ist die Temperatur eines Körpers ungleichmäßig verteilt, so entsteht ein Wärmefluß in Richtung des Temperaturgefälles d.h. in Richtung $-\operatorname{grad} T$ (vgl. Satz 3.1 a)

Sei F die Oberfläche eines Körpers mit Wärmeleitvermögen λ. Durch ein Flächenelement $\triangle F$ von F mit dem Normalenvektor $d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\nu} \cdot do$, $\boldsymbol{\nu} =$ Flächennormaleneinheitsvektor, $|d\boldsymbol{f}| = do$), fließt in der Zeit dt also die Wärmemenge (vgl. S.13 und Zeichnung S.23)

$$dQ = \lambda \ \operatorname{grad} T \cdot \boldsymbol{\nu} \ do \ dt, \tag{3.20}$$

Die Wärmemenge, die durch die Oberfläche F eines Körpers mit den Volumen τ in der Zeit $\triangle t = t_2 - t_1$ hineinfließt, wird damit gegeben durch

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_F \lambda \ \operatorname{grad} T \cdot \boldsymbol{\nu} \ do \ dt, \quad \boldsymbol{\nu} = \text{äußere Normale}. \tag{3.21}$$

Die einfließende Wärmemenge wird positiv gerechnet, denn es fließt Wärme hinein, wenn $\operatorname{grad} T$ nach außen gerichtet ist.

Bezeichnet $F(\boldsymbol{x}, t)$ die Dichte der Wärmequellen $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$, so erhalten wir für die im Volumen τ in der Zeit $\triangle t = t_2 - t_1$ freiwerdende Wärmemenge

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_\tau F(\boldsymbol{x}, t) \ d\boldsymbol{x} dt. \tag{3.22}$$

Die Wärmemengen $Q_3 = Q_2 + Q_1$ erwärmen den Körper gemäß

$$Q_3 = \int_\tau c\rho(T(\boldsymbol{x}, t_2) - T(\boldsymbol{x}, t_1)) \ d\boldsymbol{x}, \quad \text{vgl. (2.22)}. \tag{3.23}$$

Nach dem Satz von Gauß gilt, vgl. (3.12)

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \int_\tau \operatorname{div}_{\boldsymbol{x}}(\lambda \operatorname{grad}_{\boldsymbol{x}} T) \ d\boldsymbol{x} dt. \tag{3.24}$$

Bemerkung: Die tiefgestellten Indizes zeigen an, auf welche Variablen sich die Differentialoperatoren beziehen.

Der Energiesatz lautet $Q_1 + Q_2 = Q_3$ und gibt damit die Gleichung der räumlichen

Wärmeleitung in Integralform.

Mit Hilfe der Mittelwertsätze folgt

$$\begin{array}{lcl} \text{aus (3.24)}: & Q_1 = & \operatorname{div}_x(\lambda(\tilde{\boldsymbol{x}})\ \operatorname{grad}_{\boldsymbol{x}} T(\tilde{\boldsymbol{x}},\tilde{t}))\ \tau \bigtriangleup t, \\ \text{aus (3.22)}: & Q_2 = & F(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t})\ \tau \bigtriangleup t, \\ \text{aus (3.23)}: & Q_3 = & c\rho\ \frac{\partial}{\partial t} T(\hat{\boldsymbol{x}},\hat{t})\ \tau \bigtriangleup t. \end{array}$$

Der Energiesatz $Q_1 + Q_2 = Q_3$ liefert nach Division durch $\tau \bigtriangleup t$ und Grenzübergang $\tilde{t}, \hat{t}, \bar{t} \to t, \quad \tilde{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}} \to \boldsymbol{x}$

die **räumliche Wärmeleitungsgleichung**

$$\operatorname{div}_x(\lambda(\boldsymbol{x})\ \operatorname{grad}_x T(\boldsymbol{x},t)) + F(\boldsymbol{x},t) = c\rho \frac{\partial}{\partial t} T(\boldsymbol{x},t). \tag{3.25}$$

Für homogene Körper (λ = const.) erhalten wir unter Beachtung von

$$\operatorname{div}_x \operatorname{grad}_x \varphi = \Delta_x \varphi, \quad \varphi \in C^2,$$

$$\Delta_x T + \frac{F}{\lambda} = \frac{c\rho}{\lambda} T_t. \tag{3.26}$$

Bemerkung: Die tiefgestellten Indizes werden in der Literatur üblicherweise unterdrückt, da die Differentialoperatoren sich bei Evolutionsgleichungen (d.h. zeitabhängigen Gleichungen) nach allgemeiner Übereinkunft nur auf die Raumvariablen beziehen.

Zur Lösung dieser Gleichung benötigt man für die Eindeutigkeit
a) Anfangswerte im Körper, vgl. S. 15

$$T(\boldsymbol{x},0) = \varphi(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \tau, \quad \varphi \quad \text{gegeben.}$$

b) Zeitabhängige Randwerte, vgl. etwa S. 14

$$T(\boldsymbol{x},t) = \psi(\boldsymbol{x},t),\ \forall \boldsymbol{x} \in \partial\tau, \quad \psi \quad \text{gegeben.}$$

Nun interessiert uns, was passiert, wenn wir die Randwerte zeitlich konstant halten, ebenso wie die Wärmequellen $(F(\boldsymbol{x},t) = F(\boldsymbol{x}))$, und warten, bis sich ein stationärer Zustand eingestellt hat. Dieser Zustand wird durch unsere Differentialgleichung (3.26) beschrieben, wenn wir $T_t = 0$ setzen (stationäre, keine zeitabhängige Änderung mehr). Wir erhalten für eine *stationäre Wärmeströmung*, d.h. $(T(\boldsymbol{x},t) = T(\boldsymbol{x}))$, die

inhomogene Potentialgleichung

$$\Delta T = -\frac{F}{\lambda}, \quad x \in \tau. \tag{3.27}$$

Als Vorgaben zur eindeutigen Festlegung der Lösung können offensichtlich nur noch die zeitunabhängigen Randwerte dienen

(3.28) $$T(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial\tau, \qquad \psi \text{ vorgegeben.}$$

Wir haben also für die *Potentialgleichung* eine reine Randwertaufgabe. Sie heißt *Dirichlet-Problem*, falls Funktionswerte (und ggf. Ableitungen) auf dem Rand vorgegeben werden und *Neumann-Problem*, falls nur Ableitungen vorgegeben sind.

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir – ohne Herleitung – ein System von partiellen Differentialgleichungen angeben – die sog. Maxwell-Gleichungen – welches von eminenter Bedeutung in der Physik ist, weil sich daraus ein großer Teil der Elektrodynamik ableiten läßt, und welches zeigt, daß die in diesen Kapitel eingeführten Begriffe wesentliche Differentialoperatoren der theoretischen Physik darstellen.

Es seien	$\mathcal{E}$	=	Vektor der elektrischen Feldstärke,
	$\mathcal{H}$	=	Vektor der magnetischen Feldstärke,
	$\mathcal{D}$	=	Vektor der elektrischen Induktion,
	$\mathcal{B}$	=	Vektor der magnetischen Induktion,
	j	=	Stromdichtevektor der Leiterströme,
	$j^{(e)}$	=	die durch den Einfluß der elektromagnetischen Kraft hervorgerufene Stromdichte,
	ϱ	=	Ladungsdichte,
	c	=	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Beziehen sich rot und div nur auf die Ortskoordinaten, so gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathcal{H} &= \frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\,(j + j^{(e)}),\\
\operatorname{rot}\mathcal{E} &= -\frac{1}{c}\,\frac{\partial\mathcal{B}}{\partial t},\\
\operatorname{div}\mathcal{B} &= 0,\\
\operatorname{div}\mathcal{D} &= 4\pi\varrho.
\end{aligned}$$

Literatur zu diesem Kapitel: Tychonoff-Samarski, Michlin, Smirnov II und IV, Endl/Luh: Analysis II, sowie die Lehrbücher über theoretische Physik von Gerthsen, Joos, Bergmann/Schäfer.

Kapitel II

Elementares zu den Partiellen Differentialgleichungen

§ 4 Sachgemäßheit und Superposition

Definition 4.1 Sachgemäßheit
Eine ARWA, AWA oder RWA heißt *sachgemäß*, falls

1) die Aufgabe eine Lösung besitzt,

2) die Lösung eindeutig ist,

3) die Lösung stetig (in einem noch zu definierenden Sinn) von den Ausgangsdaten (AWn oder AWn und RWn) abhängt.

Die Forderungen 1) und 2) sind sowohl mathematisch als auch physikalisch vernünftig und einleuchtend. 3) ist eine Forderung über die „Brauchbarkeit“ der mathematischen Beschreibung eines physikalischen Ablaufs. Ausgehend von der Tatsache, daß Ausgangswerte, sofern sie z.B. aus Meßwerten herrühren, ungenau sein können (Meßfehler), möchte man, daß wenn die Meßfehler klein sind, auch ihre Auswirkung auf die Lösung klein bleibt. Daß diese Forderung nicht automatisch erfüllt ist, und damit nicht leer ist, wird durch Beispiele (in den Übungen) belegt werden.

Das Superpositionsprinzip

(am Beispiel einer ARWA für die inhomogene Wellengleichung.)

Vorgelegt sei die Aufgabe

$$\begin{array}{lll} & u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), & u \in C^2([0,\ell] \times [0,\infty)), \\ A_1: & u(0,t) = \mu_1(t,) & t \geq 0, \\ A_2: & u(\ell,t) = \mu_2(t), & t \geq 0, \\ A_3: & u(x,0) = \mu_3(x), & 0 \leq x \leq \ell, \\ A_4: & u_t(x,0) = \mu_4(x), & 0 \leq x \leq \ell. \end{array}$$

Bemerkung: In den Ecken kann man Verträglichkeitsbedingungen für die Ausgangswerte vorschreiben um Doppeldeutigkeiten zu vermeiden. Wir gehen darauf in Satz 5.5 ein.

Die Differentialgleichung heißt *homogen*, falls $f \equiv 0$. Eine Ausgangsbedingung A_i heißt *homogen* falls $\mu_i \equiv 0$. Die Aufgabe heißt *homogen*, wenn sowohl die Differentialgleichung als auch sämtliche Ausgangsbedingungen homogen sind.

Seien u_i, $i = 1, \ldots, 5$, reellwertige Funktionen, die in $[0,\ell] \times [0,\infty)$ zweimal stetig differenzierbar sind, möglicherweise mit Ausnahme der Geraden $t = \frac{x}{a}$ und $t = -\frac{x}{a} + \frac{2\ell}{a}$ (vgl. Satz 5.5, (5.10)) mit den Eigenschaften:

1. $u_i, i = 1, \ldots, 4$ löst die homogene Differentialgleichung, die inhomogene Bedingung A_i und die homogenen Bedingungen $A_j, j \neq i$,
2. u_5 löst die inhomogene Differentialgleichung und die homogenen Bedingungen A_i.

Dann ist
$u = \sum\limits_{i=1}^{5} u_i$ eine Lösung der vorgelegten Aufgabe.

Beweis: Selbst ist die Frau (bzw. der Mann).

§ 5 Elementares zur Wellengleichung

Gesucht ist ein $u \in C^2(B)$, $B \subset \mathbb{R}^2$, mit

(5.1) $$u_{tt} - a^2\, u_{xx} = 0.$$

Einführung neuer Koordinaten:

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

Es folgt aus $u(x, y) = w(\xi, \eta)$:

$$\begin{array}{lcll} u_x &=& w_\xi\, \xi_x + w_\eta\, \eta_x, & u_t = w_\xi\, \xi_t + w_\eta\, \eta_t \\ u_{xx} &=& w_{\xi\xi}\, \xi_x^2 + 2w_{\xi\eta}\, \xi_x\, \eta_x + w_{\eta\eta}\, \eta_x^2, & \text{wegen } \eta_{xx} = 0, \\ u_{tt} &=& w_{\xi\xi}\, \xi_t^2 + 2w_{\xi\eta}\, \eta_t\, \xi_t + w_{\eta\eta}\, \eta_t^2, & \text{wegen } \eta_{tt} = 0, \end{array}$$

und somit

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = w_{\xi\xi}\, \underbrace{(\xi_t^2 - a^2 \xi_x)}_{=0} + w_{\eta\eta}\, \underbrace{(\eta_t^2 - a^2 \eta_x^2)}_{=0} - 4a^2 w_{\xi\eta} = 0$$

oder

$$w_{\xi\eta} = 0.$$

Lemma 5.1
Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ offen.
Dann ist eine Funktion $w \in C^2(B)$ genau dann eine Lösung von

(5.2) $$w_{\xi\eta} = 0,$$

wenn sie sich darstellen läßt durch

(5.3) $$w(\xi, \eta) = w_1(\eta) + w_2(\xi), \qquad w_i \in C^2(B).$$

Beweis: (5.3) $\Rightarrow$ (5.2) klar!
(5.2) $\Rightarrow$ (5.3) durch Integrieren (vgl. S.4).

Hieraus folgt sofort:

Satz 5.2
Die allgemeine Lösung von (5.1) mit $u \in C^2(B)$ ist

(5.4) $$u(x, t) = w_1(x + at) + w_2(x - at)$$

mit beliebigen C^2-Funktionen w_1, w_2.

Physikalische Interpretation des Satzes: Superposition zweier mit den Geschwindigkeiten $+a$ bzw. $-a$ laufender Wellenvorgänge (vgl. Übungen oder Alonso/Finn: Fields and Waves II).

Bemerkung: Die Behandlung der inhomogenen Differentialgleichung auf die gleiche Weise tut nicht weh (vgl. §1 , Beispiel 4).

Satz 5.3 (d'Alembert)
Die Anfangswertaufgabe

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} & = & a^2 u_{xx}, & a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^2) \\ u(x,0) & = & \varphi(x), & \varphi \in C^2(\mathbb{R}), \\ u_t(x,0) & = & \psi(x), & \psi \in C^1(\mathbb{R}). \end{array}$$

ist sachgemäß.
Ihre Lösung wird gegeben durch die

D'Alembert'sche Lösungsformel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)\, ds.$$

Beweis: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet gemäß Satz 5.2

$$u(x,t) = w_1(x+at) + w_2(x-at). \tag{5.5}$$

Anpassung an die Anfangswerte:

$$u(x,0) = w_1(x) + w_2(x) = \varphi(x), \tag{5.6}$$

$$u_t(x,0) = a w_1'(x) - a w_2'(x) = \psi(x). \tag{5.7}$$

Integration von (5.7) liefert

$$w_1(x) - w_2(x) = \frac{1}{a} \int\limits_{x_0}^{x} \psi(s) ds + c \quad x_0, c \in \mathbb{R}. \tag{5.8}$$

Lösung von (5.6), (5.8):

$$\begin{array}{rcl} w_1(x) & = & \frac{1}{2}(\varphi(x) + \frac{1}{a} \int\limits_{x_0}^{x} \psi(s) ds + c), \\ w_2(x) & = & \frac{1}{2}(\varphi(x) - \frac{1}{a} \int\limits_{x_0}^{x} \psi(s) ds - c). \end{array}$$

Einsetzen in (5.5):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a} \left\{ \int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(s) ds + c - \int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(s) ds - c \right\}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)) + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(s)\ ds \tag{5.9}$$

D'Alembert'sche Lösungsformel

Diese Lösung ist eindeutig, denn angenommen es existieren 2 Lösungen u_1, u_2, so ist ihre Differenz $v = u_1 - u_2$ eine Lösung der homogenen Aufgabe, deren allgemeine Lösung durch (5.4) gegeben wird. Die zwangsläufige Auflösung von (5.6), (5.8) liefert gemäß (5.9) : $v = 0$ und damit $u_1 = u_2$.

Die Lösung hängt stetig von den Anfangswerten ab, wie der nächste Satz zeigt. ■

Satz 5.4
Zu jedem Zeitintervall $0 \le t \le t_0$ (oder $t_0 \le t \le 0$) und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ derart, daß sich zwei Lösungen $u_i(x,t),\ i = 1,2$ der Anfangswertaufgabe aus Satz 5.3 mit den Anfangswerten $u_i(x,0) = \varphi_i(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u_i(x,0) = \psi_i(x), \quad i = 1,2$ um weniger als ε unterscheiden

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon, \quad 0 \le t \le t_0,$$

sofern $$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta \quad \text{und} \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta\,.$$

Beweis: Übungsaufgabe.

Bemerkungen

1) Daß die Wellengleichung auch in die Vergangenheit lösbar ist, oder genauer, daß aus den Anfangswerten zum Zeitpunkt $t = 0$ der Zustand der Vergangenheit rekonstruiert werden kann, wird sich auch für größere Raumdimensionen bestätigen. Dieser Eigenschaft verdankt die Astronomie ihre Existenz.

2) Weitere Lösungsmöglichkeiten für die AWA (und die ARWA) bietet die Fouriermethode (vgl. Übungen), d.h. Trennung der Variablen durch Separationsansatz, Lösen der separierten Probleme für die verschiedenen Separationskonstanten. Annahme der Anfangs- (und/oder Randwerte) mittels Fourierentwicklung der Anfangs- (und/oder Randwert-)Funktionen nach den Lösungsfunktionen der separierten Probleme.

3) Die d'Alembert'sche Lösungsformel zeigt, daß die Lösung der AWA in einem Punkt (x,t) bestimmt ist (vgl. dazu die folgende Abbildung) durch die Werte im

   Abhängigkeitsgebiet des Punktes (x,y): $\quad A(x,t) = [x - at, x + at]$

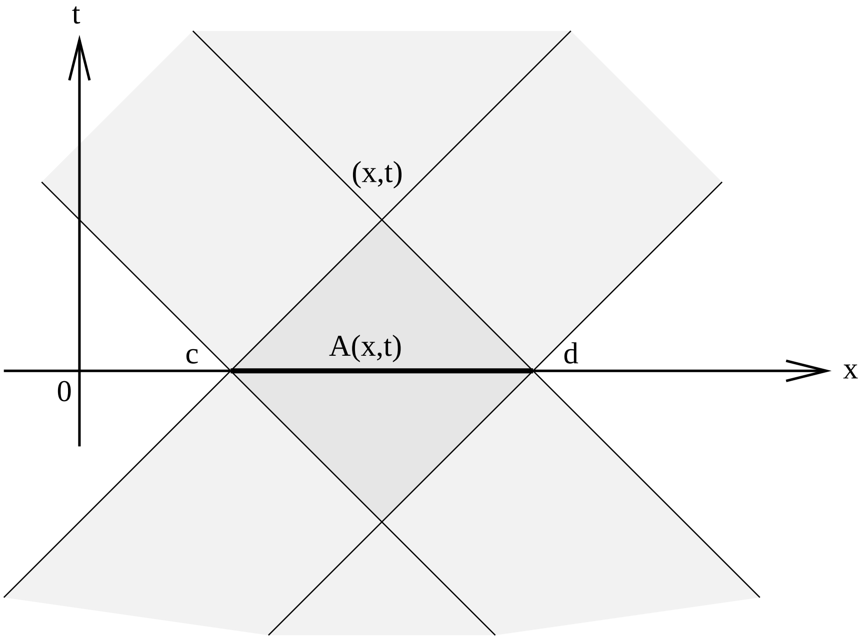
   Ist $J = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, so definieren wir das

Bestimmtheitsgebiet von J: $\quad B(J) = \{(x,t);\ A(x,t) \subset J\}$,

in dem die Werte der Lösung eindeutig bestimmt sind durch die Vorgabe der Anfangswerte in J. Dieses Intervall beeinflusst die Lösungswerte im

Einflußgebiet von J: $\quad E(J) = \{(x,t); \quad A(x,t) \cap J \neq \phi\}$.

Kausalität bedeutet: Die Lösung in (x,t) „hat ihre Ursache“ ausschließlich in den Anfangswerten im Abhängigkeitsgebiet.



Bestimmtheitsgebiet Einflußgebiet

$E(J)$ und $B(J)$ werden von den

Charakteristiken: $\quad x \underline{+} at = const.$

berandet.

4) **Wichtig:** Sind beispielsweise φ und ψ nur stückweise stetig differenzierbar (oder stückweise stetig), so ist u gemäß (5.9) immer noch eine Funktion, welche die Anfangswerte annimmt. u ist dann stückweise stetig differenzierbar in Gebieten, deren Ränder von Charakteristiken begrenzt werden, welche durch Unstetigkeitsstellen von Funktionen oder Ableitungen der Anfangswertfunktionen auf der Anfangsgeraden gehen, d.h. Singularitäten in den Anfangswerten pflanzen sich längs den Charakteristiken fort.

Die Lösung der RWAn (ansatzweise)

Satz 5.5
Die 1. RWA

$$\begin{array}{lcll} u_{tt} & = & a^2 u_{xx}, & a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad u \in C^2([0,\ell] \times [0,\infty)), \\ u(x,0) & = & \varphi(x), & \varphi \in C^2([0,\ell]), \\ u_t(x,0) & = & \psi(x), & \psi \in C^1([0,\ell]), \\ u(0,t) & = & \mu_1(t), & \\ u(\ell,t) & = & \mu_2(t), & \mu_i \in C^2([0,\infty)), \end{array}$$

besitzt genau dann eine eindeutige Lösung $\in C^2([0,\ell] \times [0,\infty))$, wenn in jedem Randpunkt $\alpha_i,\ (\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \ell)$, folgende Verträglichkeitsbedingungen erfüllt sind

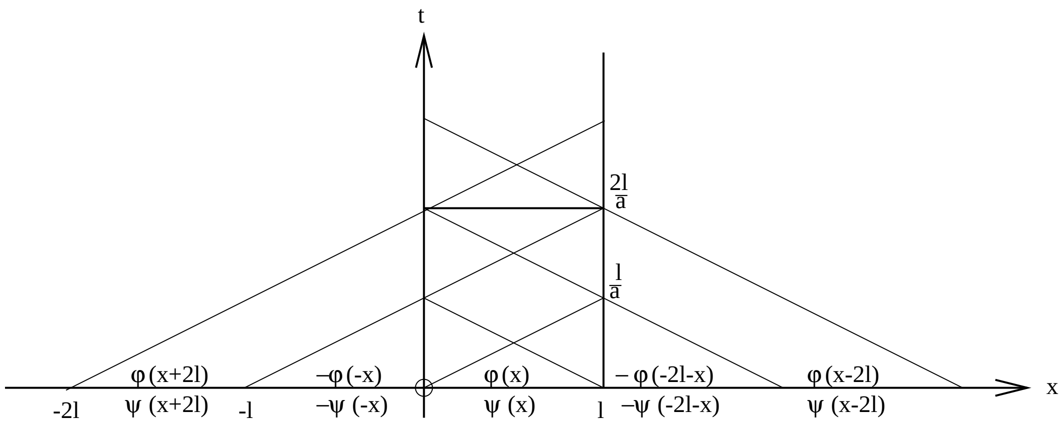
$$(5.10) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \mu_i(0) = \varphi(\alpha_i) & \text{(Stetigkeit der Funktion u)} \\ \mu_i'(0) = \psi(\alpha_i) & \text{(Stetigkeit von } u_t) \\ \mu_i''(0) = a^2\varphi''(\alpha_i) & \text{(Erfülltheit der Differentialgleichung).} \end{array} \right.$$

Beweis : Die Richtung „Existenz der eindeutigen Lösung $\Rightarrow$ (5.10)“ ist klar. Die zweite Richtung wird mit Hilfe des Superpositionsprinzips bewiesen. Grundidee ist dabei die Zurückführung der Randwertaufgabe auf eine Anfangswertaufgabe. Wir beweisen sie zunächst für den

Spezialfall 1: $\mu_i \equiv 0,\ i = 1,2.$

Es gelte (5.10). Φ und Ψ seien die ungeraden $2\,\ell$-periodischen Fortsetzungen von φ und ψ. Dann wird die Lösung u_A dieser neuen Anfangswertaufgabe wieder durch (5.9) gegeben. Sie nimmt die inhomogenen Anfangswerte an und auf Grund der ungeraden 2ℓ-periodischen Fortsetzung auch die homogenen Randwerte .

Beachte: Ist (5.10) nicht erfüllt, so hat u_A im allgemeinen Unstetigkeiten längs den Charakteristiken, die durch die Punkte $(n\ \ell, 0)$, n ganzzahlig, gehen (vgl. dazu die Bemerkung 4 nach Satz 5.4). Bei Annäherung der Lösung und/oder ihrer Ableitungen an die Charakteristiken existieren dann nur einseitige Grenzwerte. Dies wollen wir (vorläuig) in Kauf nehmen.



Bemerkung:

1) Die RWA mit homogenen RWn wurde also auf eine AWA zurückgeführt.

2) An der Lösung läßt sich ablesen, daß bei Schwingungen die Einflüsse vom Rand her in der Mitte erst mit einer zeitlichen Verzögerung wirksam werden und, daß im Bestimmtheitsgebiet die Lösung nur von den Anfangswerten abhängig ist.

Zur Vorbereitung der allgemeinen RWA aus Satz 5.5 betrachten wir zunächst den **Spezialfall 2:** das

Problem der Halbgeraden

$$\left\{ \begin{array}{lcrr} u_{tt} & = & a^2 u_{xx}, & x, t \geq 0, \\ u(x,0) & = & \varphi(x), & \varphi \in C^2[0,\infty), \\ u_t(x,0) & = & \psi(x), & \psi \in C^1[0,\infty), \\ u(0,t) & = & \mu_1(t), & \mu_1 \in C^2[0,\infty). \end{array} \right\} \tag{5.11}$$

Bemerkung:
Für die folgende Behandlung des Problems sind die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für die Anfangswertfunktionen in den Punkten $(n\,\ell, 0)$ (zunächst) unwichtig. Man erhält dann eben *Unstetigkeitsgeraden* wie im vorigen Spezialfall, wenn die Verträglichkeitsbedingungen nicht erfüllt sind.

Lösungsidee:
Zur Lösung des Halbgeradenproblems überlagern wir der Lösung u_A aus Spezialfall 1 eine von links nach rechts laufende Welle $\bar{u}(x,t) = f(x - at)$, $f \in C^2$, (sie ist eine Lösung der Differentialgleichung), die in $x = 0$ die inhomogenen Randwerte annimmt und für $x \geq 0$ die homogenen Anfangswerte.
Konstruktion von f: In $x = 0$ soll gelten

$$\bar{u}(0,t) = f(-at) \overset{!}{=} \mu_1(t) \text{ für } t \geq 0.$$

Daraus folgt für f

$$f(z) = \mu_1\left(-\frac{z}{a}\right),$$

und man erhält

$$\bar{u}(x,t) = f(\underbrace{x - at}_{z}) = \mu_1\left(-\frac{x - at}{a}\right) = \mu_1\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad \text{also}$$

$$\bar{u}(x,t) = \mu_1\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad \text{für } t - \frac{x}{a} \geq 0. \tag{5.12}$$

Für $t - \frac{x}{a} > 0$ ist dies eine Lösung der Differentialgleichung, welche für $x = 0$ den Randwert μ_1 annimmt. Definieren wir $\mu_1(t) := 0$ für $t < 0$, so ist (5.12), immer abgesehen von den schon erwähnten Unstetigkeitsgeraden, insbesonders $x = at$, eine Lösung der Differentialgleichung, welche die homogenen AWe und den inhomogenen RW μ_1 annimmt.

Die Superposition $u_H = u_A + \bar{u}$ (vgl. S.36 und (5.9)) ist eine Lösung des Halbgeradenproblems. Bezeichnen wir wieder mit Φ und Ψ die ungeraden Fortsetzungen von φ und ψ aus dem Halbgeradenproblem, so wird sie gegeben durch

(5.13)

$$u_H(x,t) = \begin{cases} \mu_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\Phi(x+at) + \Phi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(s)\, ds, & t > \frac{x}{a} \\ \frac{1}{2}\left(\Phi(x+at) + \Phi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(s)\, ds, & t < \frac{x}{a} \end{cases}$$

Behauptung: $u_H(x,t)$ ist genau dann auf der Geraden $x - at = 0$ zweimal stetig differenzierbar, wenn (5.10) für $i = 1$ gilt. Man muß dann für $x = 0$ die Grenzwerte für $t \to 0$ betrachten. (Beweis: Übung).

Für die Behandlung der RWA seien Φ und Ψ die ungeraden Fortsetzungen von φ und ψ aus Satz 5.5. Setzt man diese Werte in u_H ein, so gilt:

u_H löst die Differentialgleichung mit
inhomogenen AWn,
inhomogenen Randwerten in $x = 0$,
homogenen RWn in $x = \ell$ für $t \le \frac{\ell}{a}$.

Um homogene Randwerte in $x = \ell$ auch für $t > \frac{\ell}{a}$ zu erhalten, betrachten wir,als **Spezialfall 3:** , die Aufgabe

$$(5.14)\qquad \begin{array}{rcll} u_{tt} &=& a^2 u_{xx}, & 0 < x < \ell, \quad 0 < t, \\ u(x,0) &=& \varphi(x), & 0 \le x \le \ell, \\ u_t(x,0) &=& \psi(x), & 0 \le x \le \ell, \\ u(0,t) &=& \mu_1(t), & 0 \le t, \\ u(\ell,t) &=& 0, & 0 \le t. \end{array}$$

Sie wird durch u_H *fast* gelöst, d.h. bis auf die Randwerte in $x = \ell$ für $t > \frac{\ell}{a}$. Deshalb subtrahieren wir von der Lösung u_H eine von rechts nach links laufende Welle $f_r(x + at)$, die in $x = \ell$ für $t > \frac{\ell}{a}$ die Werte $\mu_1\left(t - \frac{\ell}{a}\right)$ annimmt, (vgl. (5.12)) also

$$f_r(\ell + at) \stackrel{!}{=} \mu_1\left(t - \frac{\ell}{a}\right) \quad \stackrel{z=\ell+at}{\Longrightarrow} \quad f_r(z) = \mu_1\left(\frac{z-\ell}{a} - \frac{\ell}{a}\right)$$

und

$$(5.15)\qquad f_r(x + at) = \mu_1\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2\ell}{a}\right).$$

Wegen $\mu_1(s) = 0$ für $s < 0$ (vgl. S. 38) gilt $f_r(x + at) = 0$ für $t + \frac{x}{a} - \frac{2\ell}{a} < 0$.

Die Überlagerung $u_r = u_H - f_r$:
(5.16)

$$u_r(x,t) = \mu_1\left(t - \frac{x}{a}\right) - \mu_1\left(t + \frac{x}{a} - \frac{2\ell}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\Phi(x+at) + \Phi(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \Psi(s)\, ds$$

erfüllt
1) die Differentialgleichung,
2) nimmt die inhomogenen AWe an,
3) erfüllt die homogenen RWe in $x = \ell$,
4) nimmt die inhomogenen RWe in $x = 0$ an, sofern $t < \frac{2\ell}{a}$.

Für $t > \frac{2\ell}{a}$ werden die inhomogenen Randwerte in $x = 0$ gestört durch $f_r(at) = \mu_1\left(t - \frac{2\ell}{a}\right)$ vgl. (5.15).

Wiederum kann die Stetigkeit und Differenzierbarkeit von u_r, insbesondere auf den Geraden $x = -at + 2\ell$ und $x = -at + \ell$, verletzt sein, falls (5.10) für die Aufgabe (5.14) in $x = \ell$ verletzt ist.

Fortsetzung der Prozedur: Analog zu (5.14) konstruiert man die Lösung u_l der RWA, bei der der linke Randwert (in $x = 0$) und die Anfangswerte homogen sind, der rechte Randwert jedoch inhomogen ist ($u_l(\ell,t) = \mu_2(t)$). Dabei sind Unstetigkeiten, u.a. auf der Geraden $x = -at + \ell$ möglich.
Werden u_r und u_l superponiert, und sind die Verträglichkeitsbedingungen (5.10) erfüllt, so kann man zeigen, daß sich die Unstetigkeiten wegheben im Bereich
$0 \le x \le \ell$ und $0 \le t \le -\frac{x}{a} + \frac{3\ell}{a}$ und $0 \le t \le \frac{x}{a} + \frac{2\ell}{a}$. (warum nur dort?)
Man kann nun das gesamte Vorgehen „ein Stockwerk höher“, d.h. „auf der Etage $t = \frac{2\ell}{a}$ “ von neuem beginnen. Dazu behandelt man, analog zum bisherigen Vorgehen mit μ_1 und μ_2 aus Satz 5.5 die Aufgabe

$$\begin{array}{lcll}
u_{tt} & = & a^2 u_{xx}, & a \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad u \in C^2([0,\ell] \times [\frac{2\ell}{a}, \infty)), \\
u(x, \frac{2\ell}{a}) & = & (u_r + u_l)(x, \frac{2\ell}{a}), & x \in [0,\ell], \\
u_t(x, \frac{2\ell}{a}) & = & \frac{\partial}{\partial t}(u_r + u_l)(x, \frac{2\ell}{a}), & x \in [0,\ell], \\
u(0,t) & = & \mu_1(t), & t \ge 2\ell/a, \\
u(\ell,t) & = & \mu_2(t), & t \ge 2\ell/a.
\end{array}$$

Die Verträglichkeitsbedingungen sind durch die vorhergehende Konstruktion erfüllt. Durch die Fortsetzung dieses Prozesses ist die Existenz der Lösung der RWA nachgewiesen. So man will, kann man das auch analytisch hinschreiben (Tychonoff-Samarski § 2.5).
Die Anfangsrandwertaufgabe mit Vorgabe der Randwerte 2. Art (also Vorgabe der Ableitungen u_x auf dem Rand) kann man auf ähnliche Weise lösen. Man muß dazu Φ und Ψ gerade 2ℓ-periodisch fortsetzen (vgl. dazu Tychonoff-Samarski).
Aus der Lösungsdarstellung kann man wie in Satz 5.4 die stetige Abhängigkeit von den Ausgangsdaten nachweisen. Die Aufgabe aus Satz 5.5 ist sachgemäß, falls die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt wird. Das geschieht mit der

Energieintegralmethode

Satz 5.6
Die 1. RWA aus Satz 5.5 ist eindeutig lösbar (dies gilt sogar für die inhomogene Differentialgleichung).

Beweis: Seien u_1 und u_2 Lösungen der Aufgabe und $v := u_1 - u_2$, so genügt v den homogenen Anfangs- und Randwerten und der homogenen Differentialgleichung. Für die homogene Differentialgleichung $[k(x)\; u_x]_x = \rho\; u_{tt} - f(x,t)$, vgl. (2.11), S.10, stellt die Funktion

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell (k(x)u_x^2(x,t)+\rho u_t^2(x,t))\;dx, \qquad k \hat{=} \text{Elastisitätsmodul}, \qquad \rho \hat{=} \text{lineare Dichte},$$

die Gesamtenergie zur Zeit dar (*Energieintegral*). Die der Differentialgleichung aus Satz 5.5 entsprechende Funktion lautet

$$E_v(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell (a^2 v_x^2 + v_t^2)\;dx. \tag{5.17}$$

Mit $v = u_1 - u_2$ bilden wir

$$\frac{d}{dt}E_v(t) = \int_0^\ell (a^2 v_x v_{xt} + v_t v_{tt})\;dx. \tag{5.18}$$

Partielle Integration des 1. Summanden

$$\int_0^\ell a^2 v_x v_{xt}\;dx = [a^2 v_x v_t]_0^\ell - \int_0^\ell v_t (a^2 v_x)_x\;dx$$

liefert wegen $v(0,t) = 0 = v_t(0,t)$, für $x = \ell$ entsprechend, durch Einsetzen in (5.18)

$$\frac{d}{dt}E_v(t) = \int_0^\ell [v_t v_{tt} - v_t(a^2 v_x)_x]\;dx = \int_0^t v_t[\underbrace{v_{tt} - a^2 v_{xx}}_{\text{Dgl.}}]\;dx = 0,$$

d.h. E_v = const., also mit Hilfe der Anfangsbedingungen

$$E_v(t) = E_v(0) = \frac{1}{2}\int_0^\ell [a^2 v_x^2(x,0) + v_t^2(x,0)]\;dx = 0.$$

Da der Integrand von (5.17) nicht negativ ist, folgt $v_x(x,t) \equiv 0, \quad v_t(x,t) \equiv 0$, und hieraus $v(x,t) =$ const. Wegen $v(x,0) = 0$ erhalten wir somit $v(x,t) \equiv 0$, und das ist die Eindeutigkeit.

Bemerkungen:

1) $E_v(t) \equiv 0$ besagt, daß die Energie der *Differenz* zweier Schwingungszustände konstant ist. Das ist nicht der Energiesatz, der besagen würde, daß die Energie eines Schwingungszustandes konstant bleibt.

2) Die Eindeutigkeit der 2. RWA läßt sich ebenso beweisen, und mit einigen Abänderungen auch die der 3. RWA.

Bemerkung zu Satz 5.5

1) Auch andere Lösungsbegriffe sind denkbar, z.B. : $u \in C^2$ in Teilgebieten, die durch Charakteristiken begrenzt werden, welche durch „Singuläre Stellen“ der AWe und RWe gelegt werden.

2) Bei der Konstruktion der Lösung der 2. Randwertaufgabe (u_x auf dem Rand vorgegeben) kann man analog vorgehen, indem man die Anfangswertfunktionen gerade 2ℓ-periodisch forsetzt.

3) Die RWA mit homogenen Randwerten und inhomogener Differentialgleichung kann man mit der Fouriermethode behandeln. (vgl. Übungen).

4) Mit dem Superpositionsprinzip kann man dann feststellen: Die 1. und die 2. RWA der 1-dimensionalen Wellengleichung sind sachgemäß.

5) Die Lösung der allgemeinen hyperbolischen RWAn (z.B. 3. RWA, nicht konstante Koeffizienten) ist schwieriger.

§ 6 Elementares zur Potentialgleichung (ohne Gauß)

Definition 6.1
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt $uq \in C^2(B)$ *harmonisch* bzw. *subharmonisch*, *superharmonisch*, wenn gilt

$$-\Delta u = 0 \quad \text{bzw.} \quad \leq 0, \geq 0.$$

Das Maximumprinzip

ist unmittelbar einleuchtend, wenn man an das Randwertproblem der stationären Wärmeströmung denkt und Quellen und Senken ausschließt: Am Rand (dort wo geheizt oder/und gekühlt wird) ist die Temperatur am höchsten und am niedrigsten. Genauer genommen müßte es eigentlich Randmaximumminimumprinzip heißen, wie aus dem Inhalt hervorgeht.

Satz 6.2 schwaches Maximumprinzip
Sei $u \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$ sub-, bzw., superharmonisch in $B \subset \mathbb{R}^n$, B offen und beschränkt.
Dann existiert ein $\boldsymbol{x}_0 \in \partial B$ mit

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \max_{\boldsymbol{x} \in \bar{B}} u(\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad = \min_{\boldsymbol{x} \in \bar{B}} u(\mathbf{x}).$$

Dieser Satz liefert die Erklärung für die Bezeichnung sub- und super in Definiton 6.1, nämlich: unter oder über den Randwerten liegend.

Für harmonische Funktionen ist der Satz ein „Maximum-Minimum-Satz“. Satz 6.2 wird als schwaches Maximumsprinzip bezeichnet, schwach insofern als nur ausgesagt wird, daß das Maximum (oder Minimum) auch am Rand angenommen wird. Wir werden später ein starkes Maximumprinzip beweisen, welches besagt, das die Extremalwerte nur auf dem Rand angenommen werden, sofern die Funktion nicht konstant ist.

Beweis (Satz 6.2) indirekt (für den subharmonischen Fall):
Da $\bar{B}$ und ∂B kompakt sind, existieren $\max_{\boldsymbol{x} \in \bar{B}} u(\boldsymbol{x})$ und $\max_{\boldsymbol{x} \in \partial B} u(\boldsymbol{x})$.
Annahme: es existiere ein $\bar{\boldsymbol{x}} \in B$ mit

$$u(\bar{\boldsymbol{x}}) = \max_{\boldsymbol{x} \in \bar{B}} u(\boldsymbol{x}) > \max_{\boldsymbol{x} \in \partial B} u(\boldsymbol{x}). \tag{6.1}$$

Für die Hilfsfunktion

$$v_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x}) + \varepsilon |\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}|^2 \quad \text{für ein} \quad \varepsilon > 0,$$

gilt

$$\Delta v_\varepsilon = \underbrace{\Delta u}_{\geq 0} + \underbrace{\varepsilon\, 2n}_{>0} > 0 \quad \text{in } B. \tag{6.2}$$

Es gilt $\forall \varepsilon > 0$

$$v_\varepsilon(\bar{\boldsymbol{x}}) = u(\bar{\boldsymbol{x}}) + \varepsilon \underbrace{|\bar{\boldsymbol{x}} - \bar{\boldsymbol{x}}|^2}_{=0} \overset{(6.1)}{>} \max_{\boldsymbol{x}\in\partial B} u(\boldsymbol{x}).$$

$$\Rightarrow \quad \exists \varepsilon_0 > 0 : \quad v_{\varepsilon_0}(\bar{\boldsymbol{x}}) > \max_{\boldsymbol{x}\in\partial B}(u(\boldsymbol{x}) + \varepsilon_0 \underbrace{|\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}|^2}_{\text{beschränkt}}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\partial B} v_{\varepsilon_0}(\boldsymbol{x}).$$

Daraus folgt, daß v_{ε_0} sein Maximum in B annimmt, z.B. in $\tilde{\boldsymbol{x}} \in B$.
Notwendig dafür ist

$$\operatorname{grad} v_{\varepsilon_0}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = 0, \quad \frac{\partial^2 v_{\varepsilon_0}(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial x_i^2} \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Hieraus folgt $\Delta v_{\varepsilon_0}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \leq 0$, im Widerspruch zu 6.2. ■

Folgerung 6.3
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann ist die 1. RWA der Poissongleichung

Zu $f \in C(\partial B)$, $g \in C(\bar{B})$ wird gesucht ein $u \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u(\boldsymbol{x}) &= g(\boldsymbol{x}) \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in B, \qquad \textbf{Poissongleichung} \\ u(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}) \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in \partial B, \end{aligned}$$

– wenn überhaupt – eindeutig lösbar.

Beweis:
Seien u_1, u_2 Lösungen, so erfüllt $v = u_1 - u_2$ die Voraussetzungen von Satz 6.2, nimmt also Max und Min auf ∂B an. Wegen $v = 0$ auf ∂B folgt $v = u_1 - u_2 = 0$ in $\bar{B}$. ■

Folgerung 6.4
(stetige Abhängigkeit von den Randwerten)
Seien $f_i \in C(\partial B)$, $i = 1, 2$, $B \subset \mathbb{R}^n$, offen und beschränkt, und u_i die Lösungen von

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= g(\boldsymbol{x}) \quad \text{in} \quad B, \\ u_i &= f_i \quad \text{auf} \quad \partial B. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\|u_1 - u_2\|_{\infty,B} \leq \|f_1 - f_2\|_{\infty,\partial B}.$$

$$\text{(beachte:} \quad \|v\|_{\infty,B} := \sup_{\boldsymbol{x}\in B} |v(\boldsymbol{x})| \quad \text{ist eine Norm).}$$

Beweis:
Mit $v = u_1 - u_2$, $\Delta v = 0$, $v|_{\partial B} = f_1 - f_2 =: f$, folgt aus Satz 6.2

$$\min_{\boldsymbol{x} \in \partial B} f(\boldsymbol{x}) \quad \leq v(\boldsymbol{x}) \quad \leq \max_{\boldsymbol{x} \in \partial B} f(\boldsymbol{x}) \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in B.$$

Wegen $\|f\|_{\infty,\partial B} = \max\{\max_{\boldsymbol{x} \in \partial B} f(\boldsymbol{x}), -\min_{\boldsymbol{x} \in \partial B} f(\boldsymbol{x})\}$ folgt hieraus $|v| \leq \|f\|_{\infty,\partial B}$. ■

Die Lösung des Dirichlet-Problems für den Kreis

Dirichlet-Problem:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in} \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < R^2\}, \\ u(x,y) &= f(x,y) \quad \text{für} \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad \text{f stetig auf } \partial B. \end{aligned}$$

Beachte:
Ist dies Problem gelöst, so bedeutet das, zusammen mit den Folgerungen 6.3 und 6.4, die Sachgemäßheit des Dirichlet-Problems im $\mathbb{R}^2$ (zumindest auf dem Kreis).

Wir formulieren das Problem auf Polarkoordinaten um:

Problem (D)

Zu $B = \{(r,\varphi);\ r \in [0,R),\ \varphi \in [0,2\pi)\}$ wird gesucht ein $u \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$ mit:
$\partial^\alpha u$ ist für $|\alpha| \leq 2$ stetig fortsetzbar auf $[0,R) \times [0,2\pi]$ derart, daß
$\partial^\alpha u(0,\varphi) = \partial^\alpha u(0,0)$, $|\alpha| \leq 2$, $\varphi \in [0,2\pi]$ (Stetigkeit im Kreismittelpunkt),
$\partial^\alpha u(r,0) = \partial^\alpha u(r,2\pi)$, $|\alpha| \leq 2$, $r \in (0,R)$ (Stetigkeit im Kreis),
und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}(r,\varphi) = 0 \quad \text{für} \quad (r,\varphi) \in [0,R) \times [0,2\pi] \quad \text{mit} \tag{6.3}$$

$$u(R,\varphi) = f(\varphi),\ \varphi \in [0,2\pi],\ f \in C[0,2\pi] \quad \text{mit} \quad f(0) = f(2\pi) \quad \text{(stetige RWe).}$$

Bemerkung: Die transformierten Funktionen u bzw. f müßten eigentlich mit neuen Buchstaben, etwa $\tilde{u}$ bzw. $\tilde{f}$, bezeichnet werden. Die obige **Schlamperei** hat sich jedoch an vielen Stellen der Literatur eingebürgert.

Übung: Man zeige, daß die linke Seite von Gleichung (6.3) die Darstellung des 2-dimensionalen Laplace-Operators in Polarkoordinaten ist.

Der Separationsansatz $u(r,\varphi) = \alpha(r)\beta(\varphi)$ führt gemäß ((6.3)) auf

$$\begin{aligned} \alpha''\beta + \frac{1}{r}\alpha'\beta + \frac{1}{r^2}\alpha\beta'' &= 0 \qquad \text{bzw.} \\ \frac{r^2}{\alpha(r)}\left(\alpha'' + \frac{1}{r}\alpha'\right) &= -\frac{\beta''}{\beta} = \lambda = \text{const}\,. \end{aligned}$$

Man erhält

$$\beta''(\varphi) + \lambda\beta(\varphi) = 0, \quad \beta(0) = \beta(2\pi), \tag{6.4}$$

$$r^2\alpha''(r) + r\alpha'(r) - \lambda\alpha(r) = 0, \quad r \in (0, R),\ \alpha \in C^2[0, R). \tag{6.5}$$

Wegen der Randbedingung folgt aus (6.4)

$$\beta_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}, \quad \lambda = n^2,\ n = 0, 1, \ldots, \tag{6.6}$$

und die Differentialgleichung (6.5) wird gelöst durch

$$\alpha_n(r) \ = \ r^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{6.7}$$

Die 2. Lösung r^{-n} scheidet aus wegen $\alpha \notin C^2[0, R)$.
Die Funktionen $r^n \cos n\varphi$ und $r^n \sin n\varphi$ lösen (6.3) und liegen im zulässigen Funktionenraum. Deshalb machen wir den Lösungsansatz (Superposition)

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi), \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}. \tag{6.8}$$

Problem: Konvergenz u. gliederweise Differentiation.

Die Randbedingungen erfordern

$$u(R, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \stackrel{!}{=} f(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{6.9}$$

Wenn wir $f \in C^1[0, 2\pi]$ voraussetzen, besitzt f in $[0, 2\pi]$ eine gleichmäßig konvergente Fourierentwicklung

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \tag{6.10}$$

und es gilt

$$\sum (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty. \quad \text{(gleichmäßige Konvergenz)} \tag{6.11}$$

Ein Vergleich von (6.9) und (6.10) ergibt

Satz 6.5
Sei $f \in C^1[0, 2\pi]$ und (6.10) seine Fourierreihe, dann ist

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) \tag{6.12}$$

Lösung von (D).

Beweis:
Die gleichmäßige Konvergenz in $[0,R]\times[0,2\pi]$ folgt aus (6.11). Differenziert man (6.12) gliedweise p_1-mal nach r und p_2-mal nach φ, so entsteht eine Reihe mit der Majorante

$$C\sum_{n=p_1}^{\infty} n^{p_1+p_2}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-p_1}(|\alpha_n|+|\beta_n|),$$

welche für $\frac{r}{R}\le q<1$ gleichmäßig konvergiert (Quotientenkriterium). ∎

Dies legt den **Verdacht** nahe: Eine harmonische Funktion ist ∞ oft differenzierbar. Dieser Verdacht bestätigt sich tatsächlich, wie – in etwas eingeschränkter Weise – durch die beiden folgenden Sätze bewiesen wird.

Anleihen aus der Funktionentheorie für $n=2$

Satz 6.6
Sei $B\subset\mathbb{R}^2$ offen und $f:B\to\mathbb{C}$ differenzierbar (analytisch, holomorph),

$$f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y),\quad \text{also}\quad u=\Re f\quad\text{und}\quad v=\Im f.$$

Dann sind u und v harmonisch in B.

Beweis:
Er folgt aus den **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{6.13}$$

und weil jedes komplexwertige, differenzierbare f unendlich oft differenzierbar ist. Beachte: (6.13) ist notwendig und hinreichend für die Regularität von f. ∎

Beispiele harmonischer Funktionen. (Anleihen aus der Funktionentheorie)
Für $z=x+iy$ erhalten wir aus Satz 6.6

$f(z)$	harm.Fkt.
1	1
z	x
z^2	$x^2-y^2,\ xy$
z^3	$x^3-3xy^2,\ y^3-3x^2y$

$f(z)$	harm.Fkt.
z^n	$r^n\sin n\varphi$ (Polarkoord.)
e^z	$e^x\sin y,\ e^x\cos y$
$\ln nz$	φ (Polarkoord.)

Hinweis: Die Kenntnis spezieller Lösungen von $\Delta u=0$ liefert eine Möglichkeit zur näherungsweisen Lösung eines Dirichlet-Problems $\Delta u=0$ in B, $u=f$ auf ∂B: Approximiere f auf ∂B durch eine geeignete Linearkombination spezieller Lösungen von $\Delta u=0$. Daraus erhält man mit Folgerung 6.3 eine Näherungslösung des Dirichletproblems samt Fehlerabschätzung.

Unser Verdacht ist bewiesen, falls die Umkehrung von Satz 6.6 gilt.

Satz 6.7
Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und u in B harmonisch.
Dann existiert eine (zu u konjugierte) harmonische Funktion v mit:

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

ist in B analytisch.

Bedeutung: Ist u harmonisch, so kann eine weitere harmonische Funktion v so konstruiert werden, daß $u + iv$ eine differenzierbare, komplexwertige Funktion ist, die aus C^∞ ist, was $u \in C^\infty$ zur Folge hat.

Beweis:
Es genügt die Existenz eines $v \in C^2(B)$ zu zeigen, das die Riemannschen Differentialgleichungen (6.13) erfüllt, also

$$\text{(6.14)} \qquad \operatorname{grad} v := \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

Die notwendige Bedingung für $v \in C^2$: $v_{xy} = v_{yx}$ ist erfüllt, wegen

$$v_{xy} - v_{yx} = \frac{\partial g_1}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial x} = -u_{yy} - u_{xx} = -\Delta u = 0.$$

Diese Bedingung ist auch hinreichend, denn betrachtet man das Vektorfeld
$\hat{v} = (v_x, v_y, v_z)^T = (g_1, g_2, 0)^T$ mit $v_z \equiv 0$, so rechnet man mit $v_{xy} = v_{yx}$ nach, daß $\operatorname{rot} \hat{v} = 0$.
Nach Satz 3.7 besitzt $\hat{v}$ ein Potential $\varphi(x,y,z)$, d.h. eine Funktion mit den Eigenschaften: $\varphi_x(x,y,z) = v_x$, $\varphi_y(x,y,z) = v_y$, $\varphi_z(x,y,z) = v_z$. Setze $v = \varphi$.
Die Anwendung der Sätze verlangt B *konvex* , aber das kann auf B *einfach zusammenhängend* erweitert werden. ■

Eine rotationssymmetrische Lösung der Potentialgleichung

Motivation:
Sei u eine harmonische Funktion $\in B \subset \mathbb{R}^n$. Laut Definition 3.3 ist u ein Potential des Vektorfeldes (Kräfte-, Geschwindigkeits- Feld) $v = \operatorname{grad} u$. Nun ist einerseits $\operatorname{div} v = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u = 0$, andererseits gibt es spezielle, rotationssymmetrische Potentiale, zum Beispiel das durch eine Masse m im Nullpunkt des $\mathbb{R}^3$ erzeugte Gravitationspotential

$$u(\boldsymbol{x}) = \gamma \frac{m}{r}, \quad r = |\boldsymbol{x}|, \quad \gamma = \text{Gravitationskonstante.} \tag{6.15}$$

Durch Nachrechnen folgt

$$\operatorname{grad} u = -\gamma \frac{m}{r^3}\boldsymbol{x},$$

und daraus

$$\operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u = 0.$$

Deshalb liegt die Frage nahe, ob $\Delta u = 0$ immer auch rotationssymmetrische Lösungen besitzt.

Mit dem Ansatz

$$u(\boldsymbol{x}) = \varphi(|\boldsymbol{x}|) = \varphi(r), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \varphi'(r)\frac{x_i}{r}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \varphi''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + \frac{\varphi'(r)}{r} - \varphi'(r)\frac{x_i^2}{r^3},$$

und damit

$$\Delta u = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) \qquad \text{(vgl. (6.3))}.$$

$\Delta u = 0$ liefert $\varphi'(r) = Cr^{1-n},\ C \in \mathbb{R}$ und mit einem $D \in \mathbb{R}$

$$\varphi(r) = \begin{cases} D + C\dfrac{r^{2-n}}{n-2}, & n \neq 2, \\ D + C\ln r, & n = 2. \end{cases} \tag{6.16}$$

§ 7 Elementares zur Wärmeleitungsgleichung

Das Maximumprinzip

besagt: Wenn die Temperatur auf dem Rand eines Körpers und im Anfangsmoment auch im Inneren des Körpers einen Wert T nicht übersteigt (nicht unter einem Wert T liegt), so kann zu keiner Zeit im Innern des Körpers eine Temperatur erreicht werden, die über (unter) T liegt, sofern keine Temperaturquellen oder -Senken vorhanden sind.

Satz 7.1 Maximumprinzip
Sei $G = B \times (0,T)$, $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt;
$u \in C^2(B \times (0,T]) \cap C(\bar{B} \times [0,T])$, $T > 0$, erfülle

(7.1) $$u_t - a^2 \Delta_x u \leq \text{ bzw. } \geq 0 \quad a \in \mathbb{R}, \quad (\mathbf{x},t) \in G.$$

Dann nimmt u Maximum bzw. Minimum auf dem *parabolischen Rand* $\tilde{\partial} G$ an.

$$\tilde{\partial} G = \bar{B} \times \{0\} \cup \partial B \times [0,T]$$

Beweis: (indirekt fürs Maximum, fürs Minimum wendet man die Schlüsse auf $u_1 = -u$ an).

Annahme: Es existiere ein $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) \in B \times (0,T]$ mit

(7.2) $$\begin{aligned} u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) &= \max_{(\mathbf{x},t)\in \bar{G}} u(\mathbf{x},t) = M + \varepsilon, \quad \text{wobei} \\ M &= \max_{\tilde{\partial} G} u(\mathbf{x},t) \text{ und } \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Behauptung: Aus der Annahme folgt: Die Hilfsfunktion

(7.3) $$v(\mathbf{x},t) = u(\mathbf{x},t) + k(\bar{t} - t), \quad k > 0 \quad \text{geeignet,}$$

nimmt ihr Maximum in einem Punkt $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t}) \in B \times (0,T]$ an (vgl. den Beweis für die Potentialgleichung).

Ist die Behauptung bewiesen, so gilt in $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t})$ (beachte zur ersten der folgenden beiden Ungleichungen: $\hat{t} = T$ ist möglich)

$$v_t(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t}) \geq 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

also
$$0 \leq v_t - a^2 \Delta_x v = u_t - k - a^2 \Delta_x u < 0 \quad \text{wegen } k > 0 \text{ und } (7.1).$$

und somit ein Widerspruch.

Beweis der Behauptung: Aus (7.2), (7.3) folgt $v|_{\tilde{\partial}G} \leq M + kT$ und

$$v(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = u(\bar{\mathbf{x}}, \bar{t}) = M + \varepsilon. \tag{7.4}$$

Wählt man $k < \frac{\varepsilon}{2T}$, so ist $v|_{\tilde{\partial}G} \leq M + \frac{\varepsilon}{2}$ und aus (7.4) folgt, daß v sein Maximum in einem Punkt $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t}) \in B \times (0, T]$ annimmt. ∎

Folgerungen:

Satz 7.2 Eindeutigkeit
Unter der Voraussetzung von Satz 7.1 gilt:
Die 1. RWA der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + g(\mathbf{x}, t) && \mathbf{x} \in B, \quad t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= \varphi(\mathbf{x}), && \mathbf{x} \in B, \\ u(\partial B, t) &= \mu(\partial B, t), && t \geq 0, \end{aligned}$$

ist, wenn überhaupt, eindeutig lösbar.

Beweis: vgl. Folgerung 6.3.

Bemerkung: Ist $n = 1$, so müssen die Randwerte am linken und am rechten Rand gesondert vorgegeben werden.

Satz 7.3 Monotonie
Unter den Voraussetzungen von Satz 7.1 gilt:
Wenn 2 Lösungen u_1, u_2 der Wärmeleitungsgleichung den Bedingungen

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}, 0) &\leq u_2(\mathbf{x}, 0), && \mathbf{x} \in B, \\ u_1(\partial B, t) &\leq u_2(\partial B, t), && 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

genügen, so gilt

$$u_1(\mathbf{x}, t) \leq u_2(\mathbf{x}, t) \quad \text{für alle} \quad (\mathbf{x}, t) \in \bar{B} \times [0, T].$$

Beweis: mit Satz 7.1.

Bemerkung: Dieser Satz eröffnet die Möglichkeit Schranken für die Lösung zu konstruieren und dies sogar in dem Fall, daß u_1 und u_2 nur je eine der Ungleichungen (7.1) erfüllen.

Satz 7.4
Die Lösungen der 1. RWA der Wärmeleitungsgleichung hängen stetig von den Rand- und Anfangswertenwerten ab.

Beweis wie bei Folgerung 6.4.

Satz 7.5
Die Lösung der RWA für die homogene Differentialgleichung ($(x,t) \in \mathbb{R}^2$) mit homogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= \varphi(x), \quad \varphi(0) = \varphi(\ell) = 0, \quad \varphi \in C^1[0,\ell], \\ u(0,t) &= 0, \\ u(\ell,t) &= 0, \end{aligned}$$

kann durch Separationsansatz gefunden werden.

Beweis: Übungsaufgabe.

§ 8 Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir behandeln hier, im Rahmen zweier Beispiele, nur elementare Vorgehensweisen. Die Eigenheiten dieser Beispiele werden wir im nächsten Paragraphen in etwas allgemeinerem Rahmen nochmals aufgreifen.

Beispiel 1:
Gesucht ist ein $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ mit

$$u_x + 2xu_y = y, \tag{8.1}$$

$$u(0, y) = 1 + y^2. \tag{8.2}$$

Anschauliche Holzhammermethode:

Die linke Seite von (8.1) sieht aus wie die Ableitung einer Funktion $u(x, y(x))$ längs einer Kurve $y = y(x)$ nach x:

$$\frac{d}{dx}u(x, y(x)) = u_x + u_y\frac{dy}{dx} \qquad \text{mit} \qquad \frac{dy}{dx} = 2x. \quad \text{(vgl. (8.1))} \tag{8.3}$$

Die zweite dieser Gleichungen ist gleichwertig mit

$$y = x^2 + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \tag{8.4}$$

Mit diesem Ergebnis kann man (8.1) auffassen als die Forderung

$$\frac{d}{dx}u(x, y(x)) = y = x^2 + c_1.$$

Hieraus erhält man durch Integrieren längs der Kurve $y = x^2 + c_1$:

$$u(x, y(x)) = \frac{1}{3}x^3 + c_1x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}. \tag{8.5}$$

Offensichtlich erfüllt (8.5) längs jeder Kurve (8.4) die Differentialgleichung (8.1).

Frage: Kann man nicht die gesamte Lösung der Differentialgleichung aufbauen, indem man längs den Kurven (8.4), welche durch geeignetes c_1 festgelegt werden müssen, die Werte für c_2 in (8.5) so vorschreibt, daß (8.2) erfüllt wird?

Das geht tatsächlich: Wir nehmen einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) und fragen zunächst auf welcher der Parabeln (8.4) er liegt (Bestimmung von c_1!). Dann folgt aus (8.5), daß u längs der ganzen Parabel bestimmt ist, falls sein Wert in einem Punkt vorgeschrieben wird (Bestimmung von c_2!). Dazu dient dann die Anfangsbedingung (8.2).

Wichtig: Die Kurve $x = 0$, auf der die AWe vorgegeben sind, darf jede der Parabeln aus (8.4) nur genau einmal schneiden, denn c_2 kann nur einmal festgelegt werden.

Der Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ liegt auf der Parabel

$$y = x^2 + (y_0 - x_0^2). \tag{8.6}$$

Ihr Schnittpunkt mit der y-Achse ist $\bar{y} = y_0 - x_0^2 =: c_1$, und dort gilt nach (8.2)

$$u(0, \bar{y}) = 1 + (y_0 - x_0^2)^2 =: c_2.$$

Damit steht der Wert der Lösung u der Aufgabe (8.1), (8.2) auf allen Punkten der Parabel (8.6) fest:

$$u(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + (y_0 - x_0^2)x + \{1 + (y_0 - x_0^2)^2\}. \qquad \text{(vgl. (8.5))}$$

Nun liegt insbesondere der beliebige Punkt (x_0, y_0) selbst auf der Parabel, und die Lösung der AWA in diesem Punkt wird gegeben durch

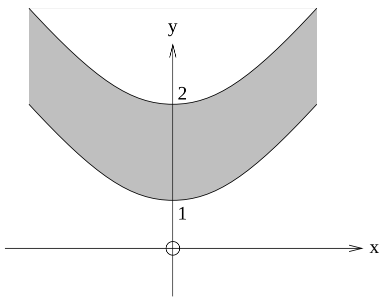
$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{3}x_0^3 + (y_0 - x_0^2)x_0 + \{1 + (y_0 - x_0^2)^2\}. \tag{8.7}$$

Da x_0, y_0 beliebig war, ersetzen wir x_0, y_0 wieder durch x, y und erhalten aus (8.7)

$$u(x, y) = x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 2x^2y + xy + y^2 + 1. \tag{8.8}$$

Wie man sich nochmals durch Nachrechnen überzeugen kann, ist dies tatsächlich die eindeutige Lösung unserer Aufgabe.

Wird die Anfangsbedingung (8.2) eingeschränkt auf z.B.: $1 \leq y \leq 2$, so wird durch (8.8) die Lösung nur festgelegt für alle Punkte, die zwischen den Parabeln (8.4) durch die Punkte $(0, 1)$ und $(0, 2)$ liegen.



Die Kurven $y = x^2 + c_1$ grenzen also die Bestimmtheitsgebiete ab. Diese Eigenschaft ist schon von der Wellengleichung her bekannt (Charakteristiken).

Die Werte längs der anderen Parabeln sind dann weitestgehend (d.h. $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$) frei wählbar. Das Bestimmtheitsgebiet des Anfangswertstücks $x = 0,\ 1 \leq y \leq 2$ wird begrenzt durch die Parabeln (8.4), welche durch die Randpunkte dieser Strecke gehen.

Wichtig für die Anwendung: Die Gerade „$x = 0$“, auf der die AWe vorgegeben sind, darf die *Charakteristiken nur treffen*, und zwar auch nur einmal.

Beispiel 2:

$$xu_x + yu_y = 1 + y^2, \quad u \in C^1(\mathbb{R}^2), \tag{8.9}$$

$$u(x,1) = x + 1. \tag{8.10}$$

legt eine leichte Modifikation der Technik aus Beispiel 1 nahe.

Mittels Division durch x oder y könnte man (8.9) auf den Fall (8.1) zurückführen, erhielte dann aber eine Singularität in $x = 0$ oder $y = 0$. Das umgehen wir, indem wir nicht x als Kurvenparameter benutzen wie in (8.3), sondern einen neuen Kurvenparameter t einführen und die (8.4) entsprechenden Kurven in Parametergestalt darstellen: $x = x(t),\ y = y(t)$.
Dann betrachten wir wieder die linke Seite von (8.9) als Ableitung der Funktion u längs dieser Kurve und erhalten (Kettenregel!)

$$\frac{du}{dt} = u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} = xu_x + yu_x. \tag{8.11}$$

Der Vergleich mit (8.9) liefert

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = y, \tag{8.12}$$

und

$$\frac{du}{dt} = 1 + y^2. \tag{8.13}$$

Die Gleichungen (8.12), (8.13) heißen *charakteristische Gleichungen*,ihre Lösungen im (x, y, u)-Raum heißen *Charakteristiken* der Differentialgleichung (8.9), ihre Projektionen auf die xy-Ebene, beschrieben durch die Gleichungen (8.12), heißen *charakteristische Grundkurven* (oder auch *Charakteristiken*, die Bezeichnung ist nicht einheitlich).

Wir erkennen: Ist $u = u(x, y)$ eine Lösung der Differentialgleichung (8.9), so erfüllt sie die Differentialgleichung insbesondere längs den charakteristischen Grundkurven (8.12), d.h. es gilt (8.13). Das bedeutet: Die Lösung u der Differentialgleichung (8.9) längs (8.12) ist also eine Charakteristik und andererseits: Hat man eine Charakteristik, d.h. eine Lösung von (8.12), (8.13), die nur einen Punkt mit einer Lösung von (8.9) gemeinsam hat, so liegt die gesamte Charateristik auf der Lösungsfläche, weil auf der ganzen Charakteristik gemäß (8.11) und (8.13) die Differentialgleichung (8.9) erfüllt ist, und die Lösung des linearen Systems (8.12), (8.13) eindeutig ist. (Die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung ist durch einen Anfangswert eindeutig festgelegt.)

Deshalb versuchen wir, wie schon im vorigen Beispiel, die Lösung unserer AWA aus Charakteristiken aufzubauen.

Die Lösung der Gleichungen (8.12), (8.13) lautet

$$x = c_1 e^t, \quad y = c_2 e^t, \quad u = t + \frac{1}{2}\, c_2^2\, e^{2t} + c_3, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{8.14}$$

Durch die Willkürlichkeit der Parametrisierung der Charakteristiken, haben wir einen zusätzlichen Parameter erhalten. Wir wählen die Parametrisierung so, daß $t = 0$ den Punkt der Anfangsgeraden $y \equiv 1$ kennzeichnet. (Eine andere Parametrisierung bedeutet nur andere Konstanten c_i.) Dadurch folgt aus (8.14): $c_2 = 1$, also

$$x = c_1 e^t, \quad y = e^t, \quad u = t + \frac{1}{2} e^{2t} + c_3. \tag{8.15}$$

Man kann nun (8.10) direkt auswerten oder t eliminieren. Letzteres liefert

$$x = c_1 y, \quad u = \ln y + \frac{1}{2} y^2 + c_3, \tag{8.16}$$

und man kann weiterverfahren wie im vorigen Beispiel.

Fazit: Die vorgeführte Technik funktioniert *fast immer*, auch für quasilineare Differentialgleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x, u) u_{x_i} = c(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

unter Bedingungen an die Funktionen a_i und c, welche die Integration des charakteristischen Differentialgleichungssystems

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x, u), \quad \frac{du}{dt} = c(x, u), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8.17}$$

erlauben.

Die Lösung der PDGLn 1. Ordnung ist damit zurückgeführt auf die Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Probleme:

1) Die Integration von (8.17): Sie ist nur dann relativ unproblematisch, falls die a_i und c nicht von u abhängen.

2) Wenn die Anfangskurve selbst eine charakteristische Grundkurve ist, kann man auf ihr keine Anfangswerte vorschreiben (das geht höchstens in einem Punkt, vgl. die Beispiele). Die Lösung wird nur eindeutig festgelegt, wenn die Anfangskurve so beschaffen ist, daß sie die Charakteristiken nur trifft.

Wir kommen auf die Gesamtproblematik im nächsten Paragraphen nochmal zurück.

Kapitel III

Klassifizierung partieller Differentialgleichungen, Charakteristische Mannigfaltigkeiten

(vgl. John: Chap. 3)

§ 9 Kriterien der Klassifizierung

Zur Motivation untersuchen wir die Frage: Inwieweit können Ergebnisse, die von den gewöhnlichen Differentialgleichungen her bekannt sind, verallgemeinert werden?

Fragestellung:
Wann hat eine Anfangswertaufgabe für eine gewöhnliche Differentialgleichung eine (eindeutige) Lösung?

Man erinnere sich:

Für die Anfangswertaufgabe n-ter Ordnung:

$$\begin{aligned} Lu(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i(x)u^{(i)}(x) &= f(x), \qquad a_i, f \in C(\mathbb{R}), \quad i = 0, \ldots, n, \\ u^{(i)}(x_0) &= \alpha_i, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

ist bekannt:

Fall I: $a_n(x_0) \neq 0$

Dann läßt sich $\frac{d^n u(x_0)}{dx^n}$ mit Hilfe der Anfangswerte und der Differentialgleichung eindeutig bestimmen, und es existiert lokal eine Lösung. Der Differentialoperator ist durch die Anfangswerte und die Differentialgleichung eindeutig bestimmt.

Fall II: $a_n(x_0) = 0$.

Dann unterscheiden wir zwei Unterfälle:

Fall IIa: $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i(x_0)u^{(i)}(x_0) = f(x_0)$.

Dann ist $Lu(x_0)$ durch die Anfangsdaten vollständig festgelegt, und $\frac{d^n u(x_0)}{dx^n}$ ist unbestimmt, d.h. falls eine Lösung existiert, braucht sie nicht eindeutig zu sein.

Fall IIb: $\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i(x_0)u^{(i)}(x_0) \neq f(x_0)$.

Dann kann keine Lösung existieren.

Wie sieht die *Verallgemeinerung der Fragestellung* aus?

Gegeben sei eine partielle Differentialgleichung der Ordnung p im $\mathbb{R}^n$. Auf einer $(n-1)$-dimensionalen Fläche werden Anfangswerte, d.h. Funktionswerte und Ableitungen bis zur $(p-1)$-ten Ordnung einschließlich (widerspruchsfrei) vorgegeben. Wann können dann die Ableitungen p-ter Ordnung berechnet werden? Um diese Fragestellung präziser zu fassen, erklären wir:

Definition 9.1
Eine Teilmenge $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ heißt C^k-*Mannigfaltigkeit* (Hyperfläche der Klasse C^k), wenn gilt:
Zu jedem $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Phi$ existieren eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und darauf eine reellwertige Funktion $\varphi \in C^k(U)$, sodaß

$$\Phi \cap U = \{\boldsymbol{x} \in U;\ \varphi(\boldsymbol{x}) = 0\} \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} \varphi \neq 0 \quad \text{auf} \quad \Phi \cap U.$$

Damit formulieren wir unsere

Fragestellung (F):
Gegeben seien:
ein Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^n$, darin eine Differentialgleichung der Ordnung p mit in B stetigen Funktionen a_k, f:

$$Lu = \sum_{|k| \leq p} a_k \partial^k u = f, \quad k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n, \quad |k| = \sum_{i=1}^n k_i, \tag{9.1}$$

und eine C^k-Mannigfaltigkeit $\Phi \subset B,$. Auf Φ sind die Funktionswerte von u und alle Ableitungen bis zur Ordnung $(p-1)$ einschließlich vorgegeben (*Cauchy-Daten*). Wann lassen sich aus diesen Angaben alle Ableitungen der Ordnung p auf Φ bestimmen?

Zunächst einige

Bezeichnungen:

1) Wenn die a_k und f von u und (oder) seinen Ableitungen bis zur $(p-1)$-ten Ordnung abhängen, heißt die Differentialgleichung (9.1) *quasilinear* und L ein *quasilinearer Differentialoperator*.

2) Hängen die a_k nur von $\boldsymbol{x}$ ab, so heißt der Differentialoperator L *linear* und die Differentialgleichung (9.1) *fast linear* (f darf noch von $\partial^k u$, $|k| \leq p-1$, abhängen).

3) Sind alle a_k und f nur von $\boldsymbol{x}$ abhängig, so heißt die Differentialgleichung linear.

Um unsere Frage besser in Griff zu bekommen, führen wir lokal (in der Umgebung U eines Punktes $\bar{\boldsymbol{x}}$ der Mannigfaltigkeit) neue Koordinaten t_μ ein (u($\mathbf{x}$)=w($\mathbf{t}$)) derart, daß die Mannigfaltigkeit Φ zu einer Koordinatenhyperebene wird, in der alle Ableitungen in Richtung der neuen Koordinatenachsen bis auf eine – t_ν – zu *inneren* Ableitungen werden, d.h. ist $w \in C^k(B)$, so folgt aus der Vorgabe der Funktionswerte von w auf Φ die Berechenbarkeit aller Ableitungen $\partial^k w, |k| \leq (p-1), k_\nu = 0$ in U. Die Vorgabe der Cauchy-Daten für u auf Φ ist dann gleichwertig mit der Vorgabe von w und seinen Ableitungen bis zur Ordnung $p-1$ auf Φ und einer aus Φ herauszeigenden Richtung $\boldsymbol{n}$, welche durch die Koordinate t_ν beschrieben wird (äußere Ableitungen).
Damit sind auch alle gemischten Ableitungen bis zur Ordnung $p-1$ bekannt, und die Frage aus $(\mathbf{F})$ reduziert sich auf die Frage nach Berechenbarkeit von $\frac{\partial^p w}{\partial t_\nu^p}$.

Praktische Durchführung

Sei $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Phi$ und $\operatorname{grad} \varphi(\bar{\boldsymbol{x}}) \neq 0$, z.B. $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \neq 0$ (vgl. Definition 9.1). Dann führen wir lokal, d.h. in einer Umgebung des Punktes $\bar{\boldsymbol{x}}$, neue Koordinaten ein durch

$$\text{(9.2)} \qquad \begin{aligned} t_q &= x_q, \qquad q = 1, \dots, n, \quad q \neq \nu, \\ t_\nu &= \varphi(\boldsymbol{x}). \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{t} = \tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{x}).$$

Dann gilt für die Funktionaldeterminante

$$|\mathbf{J}\tilde{\mathbf{\Phi}}(\boldsymbol{x})| = \frac{\partial(t_1,\ldots,t_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ 0 & & 1 & & & & 0 \\ \varphi_{x_1} & \cdots & \cdots & \varphi_{x_\nu} & \cdots & \cdots & \varphi_{x_n} \\ 0 & & & & 1 & & 0 \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{vmatrix} = \varphi_{x_\nu} \neq 0,$$

d.h. wir haben eine umkehrbar eindeutige Koordinatentransformation. Damit wird die Mannigfaltigkeit Φ lokal durch $t_\nu = 0$ beschrieben. Sind die Cauchy-Daten für u auf Φ vorgegeben, so lassen sich vermittels $u(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{t})$ (vgl. (9.2)) alle Ableitungen $\partial^k w$ für $|k| \leq p-1$ berechnen. Beispielsweise erhalten wir mit dem Umkehrsatz

$$\mathbf{J}\tilde{\mathbf{\Phi}}^{-\mathbf{1}}(\boldsymbol{t}) = (\mathbf{J}\tilde{\mathbf{\Phi}}(\boldsymbol{x}))^{-1} = \frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(t_1,\ldots,t_n)}, \quad \boldsymbol{t} = \tilde{\mathbf{\Phi}}(\boldsymbol{x}) \text{ für } \boldsymbol{x} \in \Phi$$

die Ableitungen 1. Ordnung gemäß

$$\frac{\partial w}{\partial t_\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_\mu}.$$

Die Frage aus **(F)** reduziert sich damit auf die

Frage: Kann man $\dfrac{\partial^p w}{\partial t_\nu^p}$ aus den Anfangsdaten und der Differentialgleichung (9.1) berechnen?

Wir transformieren die Differentialgleichung (9.1) gemäß (9.2) und erhalten

(9.3)
$$Lu(x_1,\ldots,x_n) = \tilde{L}w(t_1,\ldots,t_n) = \tilde{a}_{(0,\ldots,0,p,0,\ldots,0)} \frac{\partial^p w}{\partial t_\nu^p} + L'w(t_1,\ldots,t_n) = \tilde{f}(t_1,\ldots,t_n).$$

$L'w(t_1,\ldots,t_n)$ enthält bzgl. t_ν nur Ableitungen der maximalen Ordnung $p-1$.

Definition 9.2
Für den Differentialoperator L aus Gleichung (9.3) erklären wir

1) Kann der Differentialoperator L im Punkt $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Phi$ aus den Anfangsdaten allein berechnet werden, so heißt L *innerer Differentialoperator in* $\bar{\boldsymbol{x}}$ *bzgl. der Mannigfaltigkeit* Φ.

2) Die Mannigfaltigkeit Φ heißt dann *charakteristisch für* L *in* $\bar{\boldsymbol{x}}$.

3) Ist Φ in jedem Punkt charakteristisch, so heißt sie *charakteristische Mannigfaltigkeit bzgl.* L.

Mit diesen Begriffen gilt offensichtlich der

Satz 9.3
Folgende Aussagen sind äquivalent in $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Phi$:

1) L ist ein innerer Differentialoperator in $\bar{\boldsymbol{x}}$ bzgl. Φ.

2) Φ ist charakteristisch für L in $\bar{\boldsymbol{x}}$

3) Im Koordinatensystem $(t_1, \ldots, t_n)$ verschwindet der Koeffizient von $\dfrac{\partial^p w}{\partial t_\nu^p}$ im Punkt $\bar{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{t}(\bar{\boldsymbol{x}})$.

Bemerkung: Der Fall 3) des Satzes macht die Verbindung zu Fall II, Seite 57 bei gewöhnlichen Differentialgleichungen deutlich. Dies kommt auch im folgenden Satz zum Audruck. Sein Beweis folgt unmittelbar aus der obigen Herleitung.

Satz 9.4
Alle Ableitungen $\partial^k u$, $|k| \leq p$ sind in $\bar{\boldsymbol{x}}$ genau dann eindeutig durch die Cauchy-Daten und die Differentialgleichung $Lu = f$ festgelegt, wenn Φ in $\bar{\boldsymbol{x}}$ für L nicht charakteristisch ist.

§ 10 Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten zunächst

lineare, inhomogene, partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$Lu(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}) u_{x_i}(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0, \tag{10.1}$$

für welche die Anfangswerte auf einer C^1-Mannigfaltigkeit Φ vorgeschrieben werden sollen und fragen, welche Bedingungen Φ erfüllen muß, damit die Aufgabe eine Lösung haben kann. Gemäß Satz 9.3 muß dazu zunächst geklärt werden, wann Φ charakteristisch ist.

Wir transformieren gemäß (9.2): $u(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{t})$. Es folgt

$$\begin{aligned} Lu \; = \; \widetilde{L}w \; &= \; \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{\sum_{j=1}^{n} w_{t_j} \frac{\partial t_j}{\partial x_i}}_{u_{x_i}} \\ &= \; \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial t_j}{\partial x_i} \right)}_{\tilde{a}_j} w_{t_j} \; = \; \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j(t) \frac{\partial w}{\partial t_j}, \end{aligned}$$

und wegen $\dfrac{\partial t_\nu}{\partial x_i} = \varphi_{x_i}$ ist zu untersuchen, wann

$$0 = \tilde{a}_\nu = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_{x_i} \tag{10.2}$$

gilt (vgl. Satz 9.3, 3)).
Φ ist charakteristisch,wenn es gemäß Definition 9.1 dargestellt werden kann mit einem φ, welches (10.2) löst.

Gemäß dem Vorgehen aus Beispiel 2 des vorigen Paragraphen lauten die charakteristischen Gleichungen von (10.2)

$$\begin{gathered} \frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \boldsymbol{x}(s) = (x_1(s), \ldots, x_n(s)), \\ \frac{d\varphi(\boldsymbol{x}(s))}{ds} = 0 \quad (\Longleftrightarrow \varphi(\boldsymbol{x}(s)) = \text{const.}) \end{gathered}$$

Dann legt der Lösungsweg des Beispiels folgenden Satz nahe

Satz 10.1
Seien $a_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Dann sind äquivalent

1) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ist eine Lösung von (10.2).

2) $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ erfüllt $\varphi(x_1(s), \ldots, x_n(s)) = \text{const}.$ für jede Lösung $\boldsymbol{x}(s)$ des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\text{(10.3)} \qquad \frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \quad \boldsymbol{x}(s) = (x_1(s), \ldots, x_n(s)).$$

Bemerkungen:

1) Eine Funktion φ, welche die Bedingung 2 des Satzes erfüllt, heißt *Integral* des Systems (10.3).

2) Die Gleichungen (10.3) heißen *charakteristische Gleichungen, charakteristische Grundgleichungen* der Differentialgleichnung (10.2), ihre Lösungen heißen *Grundkurven.*

3) Satz 10.1 bedeutet, daß charakteristische Manigfaltigkeiten durch Integrale des Systems der charakteristischen Gleichungen beschrieben werden.

4) Es genügen auch schwächere Voraussetzungen an die a_i, welche die lokale Lösbarkeit von (10.3) garantieren.

Beweis von Satz 10.1

1) $\Rightarrow$ 2):
Sei φ eine Lösung von (10.2) und $x_1(s), \ldots, x_n(s)$ eine Lösung von (10.3). Dann besagt die Differentialgleichung (10.2), daß

$$\frac{\partial \varphi}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial s} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{x_i} a_i = 0,$$

d.h.

> Auf jeder Lösungskurve von (10.3) hat jede Lösung der partiellen Differentialgleichung (10.2) einen konstanten Wert: $\varphi(x_1(s), \ldots, x_n(s)) = c$.

Oder anders ausgedrückt:
Die Richtungsableitung der Lösung φ von (10.2) in Richtung des Tangentenvektors der Kurven aus (10.3) ist Null.

2) $\Rightarrow$ 1):
Sei $\varphi(x_1(s), \ldots, x_n(s)) = c = \text{const}.$, so folgt durch Differentiation in einem vorgegebenen Punkt $\tilde{\boldsymbol{x}} = (x_1(s), ..., x_n(s))$:

$$\frac{\partial c}{\partial s} = 0 = \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial s} = \sum_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot a_j, \quad \text{also (10.2) für} \quad \boldsymbol{x} = \tilde{\boldsymbol{x}}.$$

Nun ist jedoch (10.2) unabhängig von einer Kurve und deren Parametrisierung. Der Satz ist erst bewiesen, wenn wir zeigen, daß für jeden Punkt $\bar{\boldsymbol{x}}$ die Differentialgleichung (10.2) in einer Umgebung $U(\bar{\boldsymbol{x}})$ gelöst werden kann. Dies werden wir im nächsten Abschnitt nachholen. ■

Skizzenhafte Auszüge aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Wir eliminieren zunächst den Parameter s aus (10.3): Sei $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert ein $j \in \{1, \ldots, n\} : \; a_j(\bar{\boldsymbol{x}}) \neq 0$ (vgl. (10.1)), und wir erhalten in einer Umgebung von $\bar{\boldsymbol{x}}$ mit

$$1 = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x_j}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial s}{\partial x_j} = (\frac{\partial x_j}{\partial s})^{-1} = \frac{1}{a_j(\boldsymbol{x})}$$

die zu (10.3) äquivalente Darstellung mit x_j als Parameter statt s:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{a_i(\boldsymbol{x})}{a_j(\boldsymbol{x})}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad i \neq j.$$

Sei ohne Einschränkung $j = 1$:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_1} = \frac{a_i(\boldsymbol{x})}{a_1(\boldsymbol{x})} =: \bar{a}_i(\boldsymbol{x}), \quad i = 2, \ldots, n, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n). \tag{10.4}$$

Für dieses System gilt der

Existenz- und Eindeutigkeitssatz
Für $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ sei $U(\bar{\boldsymbol{x}})$ eine Umgebung und $\bar{a}_i \in C^1(U(\bar{\boldsymbol{x}})), \quad i = 2, \ldots, n.$
Für alle $(\bar{x}_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in U(\bar{\boldsymbol{x}})$ existiert dann in einer Umgebung von $\bar{x}_1$ genau eine Lösung $x_i = w_i(x_1), \quad i = 2, \ldots, n,$ von (10.4) mit den Anfangswerten

$$w_i(\bar{x}_1) = \alpha_i, \quad i = 2, \ldots, n. \tag{10.5}$$

Diese Lösung hängt stetig differenzierbar von den AWn α_i ab.

Bemerkung: Insbesondere existiert also eine Lösung mit den Anfangswerten $w_i(\bar{x}_1) = \bar{x}_i, \; i = 2, ..., n.$

Beweisidee:
Wir integrieren das System (10.4)

$$x_i(x_1) = \alpha_i + \int_{\bar{x}_1}^{x_1} \bar{a}_i(\xi, x_2(\xi), \ldots, x_n(\xi)\, d\xi, \quad i = 2, \ldots, n$$

Der Banach'schen Fixpunktsatz liefert einen eindeutigen Fixpunkt dieses Systems, von dem man zeigt, daß er eine Lösung des Systems (10.4) ist. Die dafür notwendige Lipschitzbedingung folgt aus $\bar{a}_i \in C^1$. Damit ist der Beweis des Satzes 10.1 abgeschlossen.

Bemerkung: Die Voraussetzung $\bar{a}_i \in C^1(U(\bar{\boldsymbol{x}})), \quad i = 2, \ldots, n,$ kann für den Existenzbeweis abgeschwächt werden, ist jedoch notwendig für die stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten.

Bestimmung der Integrale des Systems (10.2)

Aus dem Existenzsatz folgt auch, daß die allgemeine Lösung des Systems (10.4) von $(n-1)$ Konstanten $c_i, \quad i = 1, \ldots, n-1,$ abhängt.

(10.6) $$x_i(x_1) = \psi_i(x_1, c_1, \ldots, c_{n-1}), \quad i = 2, \ldots, n,$$

derart, daß zu jedem Satz von AWn α_i ein Satz von Konstanten c_i gehört und umgekehrt.

Sind die AWe und die allgemeine Lösung gegeben, so muß man mit Hilfe der AWe (10.5) die Konstanten der allgemeinen Lösung (10.6) berechnen. Das geschieht durch Auflösen von (10.6) nach den c_i an der Stelle $\bar{x}_1, \; x_i(\bar{x}_1) = \alpha_i, \quad i = 2, \ldots, n$. Durch Auflösen nach den c_i erhält man

(10.7) $$c_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Die Auflösung von (10.6) nach den c_i verlangt nach dem Satz über implizite Funktionen, daß die Jacobimatrix $\dfrac{\partial(\psi_2, ..\psi_n)}{\partial(c_1, ..., c_{n-1})}$ reguär ist. Dann ist aber auch die Jacobimatrix der Umkehrfunktion $\dfrac{\partial(\varphi_1, .., \varphi_{n-1})}{\partial(x_2, ..., x_n)}$ regulär.

Die Differentiation $\dfrac{d\varphi}{ds}$ zeigt, daß die φ_i die Bedingung 1) von Satz 10.1 erfüllen. Dies motiviert den Namen *Integral (Lösung) des Systems* (10.3). Wir wiederholen (vgl. Bemerkung 1):

> Eine Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ heißt *Integral (Lösung) des Systems* (10.3), wenn sie zu einer Konstanten wird, falls eine beliebige Lösung $x_i = x_i(x_1), \quad i = 2, \ldots, n,$ bzw. $x_i = x_i(s), \quad i = 1, \ldots, n\,,$ die nach dem Existenzsatz existiert, in sie eingesetzt wird.

Den Begriff *allgemeine Lösung*, den wir gerade benutzt haben, muß man noch präzisieren. Dazu benötigen wir Aussagen über

Abhängigkeit von Funktionen mehrerer Variabler

Wir begnügen uns mit einigen Bemerkungen und verweisen für eine ausführliche Darstellung auf Kamke: Differentialgleichungen II, Akad. Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.G. (Anhang).

Definition 10.2

1) Die Funktionen $u_\nu(x_1, \ldots, x_q), \quad \nu = 1, \ldots, p$ seien in einem beschränkten abgeschlossenen Bereich $B \subset \mathbb{R}^q$, $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset$ definiert.
Sie heißen in B voneinander abhängig (functionally dependent), wenn es eine Funktion $F(v_1, \ldots, v_p)$ gibt mit folgenden Eigenschaften

   (a) $F \in C^1(\mathbb{R}^p)$,

   (b) Es gibt kein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^p$ mit $F(v_1, \ldots, v_p) \equiv 0 \quad \forall\, (v_1, \ldots, v_p) \in G$,

   (c) In $B \subset \mathbb{R}^q$ gilt $F(u_1(x_1, \ldots, x_q), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_q)) \equiv 0$.

2) Die Funktionen u_ν heißen in einem (offenen) Gebiet $G \subset \mathbb{R}^q$, in dem sie definiert sind, voneinander abhängig, wenn sie in jedem beschränkten, abgeschlossenen Teilbereich $B \subset G$, $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset$, voneinander abhängig sind.

Bemerkung: Dies ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der linearen Abhängigkeit von Funktionen. An die Stelle einer Linearkombination von Funktionen tritt eine Funktion F. Dadurch wird die lineare Unabhängigkeit der Funktionen ersetzt durch die „ lineare Unabhängigkeit“ der Ableitungen (vgl. dazu den nächsten Satz und die Bemerkung auf S. 65)

Satz 10.3 Abhängigkeit von Funktionen

1) Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, so sind die Funktionen $u_\mu \in C^1(G)$, $\mu = 1, \ldots, n$ in G genau dann voneinander abhängig, wenn die Funktionaldeterminate (Jakobideterminante)

$$|J(x_1, \ldots, x_n)| = \left| \frac{\partial(u_1, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right| = \left| \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} \right| \equiv 0 \quad \text{in } G \text{ ist.}$$

2) Funktionen $u_\mu \in C^1(G)$, $\mu = 1, \ldots, p$, $p \leq n$ sind voneinander unabhängig, wenn die Funktionalmatrix

$$\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} \right)_{\substack{\mu=1,\ldots,p \\ \nu=1,\ldots,n}}$$

in G fast überall den Rang p hat.

Zum Beweis vgl. Kamke: Differentialgleichungen II, Akad. Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.G. (Anhang).

Folgerung: Funktionen $u_\mu \in C^1(G)$, $\mu = 1, \ldots, p > n$ sind immer voneinander abhängig, da man $(p-n)$ *blinde* Variable einführen kann und dann Teil 1) des obigen Satzes anwendet.

Bemerkung: Aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz folgt, daß es $(n-1)$ von *einander unabhängige* (vgl. dazu Satz 10.3) Integrale $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ gibt (*Integralbasis*).

Dies ist aber auch die Höchstzahl, denn faßt man die Differentialgleichung (10.2) für die φ_i als Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten a_i auf:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{in einem Gebiet,}$$

so folgt, daß die a_j nur dann nicht alle verschwinden, wenn die Koeffizientendeterminante $|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}| = 0$ ist, was die Abhängigkeit von je n Lösungen bedeutet (vgl. dazu Satz 10.3). Wir haben somit die *allgemeine Lösung* der homogenen linearen Differentialgleichung (10.2) konstruiert, die aus der Maximalzahl unabhängiger Integrale besteht.

Quasilineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{x}, u) u_{x_\nu}(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}, u), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \tag{10.8}$$

für eine gesuchte Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$.

Ihre Lösung wird durch einen Trick auf die Lösung homogener, linearer Differentialgleichungen zurückgeführt:

Idee: Man führe $u = x_{n+1}$ als neue Variable ein, und betrachte mit $f_{n+1}(\boldsymbol{x}, x_{n+1}) := g(\boldsymbol{x}, x_{n+1})$ für eine Funktion $\varphi(\boldsymbol{x}, x_{n+1})$ das lineare homogene Hilfsproblem

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} f_\nu(\boldsymbol{x}, x_{n+1})\ \varphi_{x_\nu}(\boldsymbol{x}, x_{n+1}) = 0. \tag{10.9}$$

Den Zusammenhang mit der quasilinearen Gleichung (10.8) liefert der folgende Satz, der besagt, daß man eine Lösung für die quasilineare Differentialgleichung aus einem Integral der homogenen Differentialgleichung – $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, x_{n+1})$ – durch Auflösen von $\varphi(\boldsymbol{x}, x_{n+1}) = c$ nach x_{n+1} für eine beliebige Konstante c erhält, wenn die so entstandene Funktion die Voraussetzungen des folgenden Satzes erfüllt. (Kamke: Differentialgleichungen II, §3, Satz 2)

Satz 10.4
Seien $G_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet, $f_\nu, g \in C(G_{n+1})$, $\nu = 1, \dots, n$,
und $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, x_{n+1})$ eine Lösung der homogenen Gleichung (10.9) in G_{n+1}.

Sei $G_n \subset \mathbb{R}^n$ ein weiteres Gebiet und $u \in C^1(G_n)$ derart, daß

α) $(\boldsymbol{x}, u) \in G_{n+1}$ für $u = u(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{x} \in G_n$,
β) es gibt kein Teilbegiet $\widetilde{G} \subset G_n$ mit $\varphi_{x_{n+1}}(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})) \equiv 0$ für $\boldsymbol{x} \in \widetilde{G}$,
γ) $\varphi(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})) = c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $\boldsymbol{x} \in G_n$.

Dann ist $u(\boldsymbol{x})$ eine Lösung der quasilinearen Differentialgleichung (10.8).

Beweis:
Aus γ) folgt durch Differenzieren

$$\varphi_{x_\nu} + \varphi_{x_{n+1}} u_{x_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \dots, n. \tag{10.10}$$

Einsetzen von $\varphi_{x_\nu}, \quad \nu = 1, \dots, n$ in (10.9) ergibt wegen β) die Gleichung (10.8) und damit die Behauptung. ■

Man kann nun die Integrale von (10.9) variieren und die Konstanten und erhält damit alle Lösungen von (10.8), wenn für die Dgl. (10.9) ein Existenzsatz besteht, nach dem es zu jeder differenzierbaren Funktion $u(\boldsymbol{x})$ ein Integral $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, u)$ gibt. Hier hilft der folgende Satz. (vgl. Kamke: Differentialgleichungen II, §3, Satz 3)

Satz 10.5

1) Sei $G_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet und $f_\nu, g \in C(G_{n+1})$.
2) Zur homogenen Differentialgleichung (10.9) existiere eine Integralbasis im Gebiet G_{n+1}.
3) In einem Gebiet $G_n \subset \mathbb{R}^n$ besitze die quasilineare Differentialgleichung (10.8) eine *nichttriviale* Lösung u (d.h. es gibt kein Teilgebiet $\widetilde{G} \subset G_n$ mit $f_\nu(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})) \equiv 0$ für $\boldsymbol{x} \in \widetilde{G}$ und $\nu = 1, \dots, n$).

Dann existiert sogar für jedes abgeschlossene Teilgebiet $\widetilde{G}_n \subset G_n$ eine Lösung φ von (10.9) mit

$$\varphi(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x})) \equiv 0 \quad \text{in} \quad \widetilde{G}_n \qquad (c = 0 \quad \text{in Satz 10.4}, \gamma)).$$

Die Sätze 10.4 und 10.5 kann man ausnutzen um einen Lösungsweg zur Lösung der AWA für die Differentialgleichung (10.8) zu erhalten (vgl. nächsten Abschnitt). Da man die Voraussetzungen 3) von Satz 10.5 oft nicht oder nur schwer nachprüfen kann, muß die auf dem zu beschreibenden Lösungsweg gefundene Funktion zur Probe in die Differentialgleichung eingesetzt werden.

Lösungsmethode von Lagrange

Gegeben sei die Differentialgleichung (10.8)

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{x}, u)\; u_{x_\nu}(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}, u), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit den AWn

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi) = w(x_1, \dots, x_{n-1}). \tag{10.11}$$

Die Anfangsmannigfaltigkeit wurde in eine Hyperebene $\xi = \text{const}$. transformiert.

Bestimme eine Integralbasis $\psi_\nu(x_1,\dots,x_n,u), \quad \nu=1,\dots,n$ für die homogenisierte, lineare Differentialgleichung (10.9). Das ist praktisch oft schwierig genug: Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems (vgl. vorigen Abschnitt).

Dann ist für beliebiges $F\in C^1(\mathbb{R}^n)$ auch

$$\psi(\boldsymbol{x},u)=F(\psi_1(x_1,\dots,x_n,u),\dots,\psi_n(x_1,\dots,x_n,u)) \tag{10.12}$$

eine Lösung von (10.9), denn

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} f_\nu \sum_{i=1}^{n} \partial_i F\cdot\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\nu} \;=\; \sum_{i=1}^{n}\partial_i F \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n+1} f_\nu\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\nu}}_{=0} \;=\; 0.$$

Man bestimme F so, daß $\psi(\boldsymbol{x},u)=0$ gilt, zumindest auf der Anfangsmannigfaltigkeit, (vgl. Satz 10.4, γ) mit c=0 und Satz 10.5), d.h.

(10.13)

$$F\left(\psi_1(x_1,\dots,x_{n-1},\xi,w(x_1,\dots,x_{n-1})),\dots,\psi_n(x_1,\dots,x_{n-1},\xi,w(x_1,\dots,x_{n-1}))\right)=0,$$

also Annahme der Anfangswerte für ψ.

So eine Funktion F existiert, denn in (10.13) stehen n Funktionen ψ_ν mit $n-1$ Variablen $x_1,\dots,x_{n-1}$. Diese müssen voneinander abhängig sein (Satz 10.3, 1), Definition 10.2).

So ein F zu finden, ist konstruktiv oft schwierig. Man kann dann nach Satz 10.4 erwarten, eine Lösung der Anfangswertaufgabe gefunden zu haben (was aber in jedem Fall überprüft werden muß). Ob mit diesem F die Gleichung $\psi(\boldsymbol{x},u)=0$ (vgl. (10.12)) explizit nach u auflösbar ist, bleibt fraglich.

Wir demonstrieren diese Methode an 2 Beispielen.

Beispiel 1)

$$xuu_x+yuu_y=x^2+y^2+u^2,\quad u(1,y)=y^2.$$

Für die zugehörige homogene, lineare Differentialgleichung

$$xu\psi_x+yu\psi_y+(x^2+y^2+u^2)\psi_u=0$$

findet man die Lösung $\psi_1(x,y,u)=\frac{y}{x}$ und danach (nach einem Reduktionsverfahren: Kamke II, § 2 Nr. 9)

$$\psi_2=\frac{1}{x^2}(u^2-2(x^2+y^2)\log x)\quad \text{für } x>0.$$

ψ_1,ψ_2 bilden für $x>0$ eine Integralbasis (man muß das durch Nachrechnen zeigen: $\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial(x,y,u)}\right)$ hat Rang 2). Dann bestimme man F so, daß:

$$F(\psi_1(1,y,y^2),\psi_2(1,y,y^2))=F(y,y^4)\overset{!}{=}0.$$

Beachte: $$\frac{1}{x^2}(u^2 - 2(x^2+y^2)\log x)\Big|_{\substack{x=1\\u=y^2}} = y^4.$$

$F(u,v) = u^4 - v$ tut das. Daraus folgt

$$\psi(x,y,u) = F(\psi_1,\psi_2) = \frac{y^4}{x^4} - \frac{u^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}(x^2+y^2)\log x.$$

Auflösung von $\psi(x,y,u) = 0$ nach u liefert bei Beschränkung auf $u > 0$

$$u = \frac{1}{x}(y^4 + 2x^2(x^2+y^2)\log x)^{1/2}.$$

Nachrechnen zeigt, daß dies für $x > 0,\ y > 0$ eine Lösung der Anfangswertaufgabe ist. (weiterführende Literatur: z.B. Kamke II, Courant-Hilbert II)

Beispiel 2)

$$x^2 u_x + u u_y = 1, \quad u = 0 \quad \text{für} \quad x + y = 1,\ x > 0.$$

In diesem Beispiel finden wir die Integralbasis mit Hilfe der charakteristischen Gleichungen.
Die homogenisierte lineare Differentialgleichung lautet

$$x^2\psi_x + u\psi_y + \psi_u = 0.$$

Die charakteristischen Gleichungen

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad \frac{dy}{dt} = u, \quad \frac{du}{dt} = 1$$

haben die Lösungen

$$x = (c_1 - t)^{-1}, \quad y = \frac{t^2}{2} + c_3 t + c_2, \quad u = t + c_3.$$

Setze $c_3 = 0$ (Festsetzung des Anfangspunktes für die Parametrisierung)
Die Elimination von t ergibt:

$$x = (c_1 - u)^{-1}, \quad y = \frac{u^2}{2} + c_2.$$

Auflösen nach c_1, c_2 (vgl. (10.7)) liefert

$$c_1 = \frac{1 + xu}{x} = \psi_1(x,y,u), \quad c_2 = y - \frac{u^2}{2} = \psi_2(x,y,u).$$

ψ_1, ψ_2 sind eine Integralbasis der homogenen, linearen Gleichung. (Nachrechnen!)
Bestimme F so, daß für $x > 0$ gilt

$$0 \stackrel{!}{=} F(\psi_1(x, 1-x, 0), \psi_2(x, 1-x, 0)) = F\left(\frac{1}{x}, 1 - x\right).$$

Daraus folgt

$$F(u,v) = -\frac{1}{u} + 1 - v.$$

Einsetzen ergibt

$$0 = \frac{-x}{1+xu} + 1 - y + \frac{u^2}{2}.$$

(implizite Lösungsform)

Aus den vorgeführten Beispielen und Methoden schließen wir:

1) Die charakteristischen Gleichungen (nicht nur die Grundgleichungen) müssen sich nicht unbedingt lösen lassen (wie es in den Beispielen zufällig der Fall war), und wenn, dann braucht man oft Tricks.

2) Man muß bei vorgegebenen Aufgaben die Lösung nach den verschiedenen Methoden (vgl. die Beispiele 1,2) zu gewinnen suchen.

3) Wenn alles nicht klappt, braucht man numerische Methoden.

4) Unabhängig davon, ob eine geschlossen angebbare Lösung der charakteristischen Gleichungen existiert oder nicht, stellen wir fest: Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung besitzen charakteristische Mannigfaltigkeiten.

5) Gibt man Anfangswerte auf einer charakteristischen Mannigfaltigkeit vor, so existiert keine, oder zumindest keine eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe.

§ 11 Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Wir betrachten eine quasilineare Differentialgleichung 2. Ordnung in einem Gebiet

$$(11.1)\qquad Lu := \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, u_{x_i x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j} + c\, u = f, \quad \boldsymbol{x} \in B \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u \in C^2(B).$$

Dabei kann man ohne Einschränkung die Matrix $A = (a_{ik})$ als symmetrisch voraussetzen, sonst könnte man sie symmetrisieren gemäß

$$a_{ik}u_{x_ix_k} + a_{ki}u_{x_kx_i} = (a_{ik}+a_{ki})\underset{\substack{\uparrow\\ u\in C^2!}}{u_{x_ix_k}} = \underbrace{\frac{1}{2}(a_{ik}+a_{ki})}_{\tilde a_{ik}}\, u_{x_ix_k} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_{ik}+a_{ki})}_{\tilde a_{ki}}\, u_{x_kx_i}.$$

Wann können aus den Cauchy-Daten auf einer Mannigfaltigkeit und der Differentialgleichung die Ableitungen 2. Ordnung berechnet werden?

Die C^2- Mannigfaltigkeit Φ, auf der die Cauchydaten vorgegeben sind, sei in der Umgebung $U(\bar{\boldsymbol{x}})$ eines Punktes $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Phi$ gegeben durch $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_\nu} \neq 0.$
Dann transformieren wir die Differentialgleichung gemäß (9.2) in der Umgebung $U(\bar{\boldsymbol{x}})$:

$$\begin{aligned} t_i &= x_i, \quad i = 1,\ldots,n, \quad i \neq \nu,\\ t_\nu &= \varphi(x_1,\ldots,x_n),\\ u(x_1,\ldots,x_n) &= w(t_1,\ldots,t_n), \end{aligned}$$

und untersuchen, wie der Koeffizient von $\dfrac{\partial^2 w}{\partial {t_\nu}^2}$ aussieht (Sätze 9.3 und 9.4). Mit der Abkürzung

$$t_{ik} = \frac{\partial t_i}{\partial x_k}$$

gilt

$$\begin{aligned} u_{x_\ell} &= \sum_{k=1}^{n} w_{t_k} t_{k\ell},\\ u_{x_\ell x_s} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} w_{t_kt_i}\; t_{is}t_{k\ell} + \quad \text{Terme niedrigerer Ordnung}\right). \end{aligned}$$

Damit folgt aus (11.1)

$$Lu = \Lambda w = \sum_{\ell,s=1}^{n} a_{\ell s} \sum_{k,i=1}^{n} w_{t_kt_i}\; t_{is}t_{k\ell} + \quad \text{Terme niedrigerer Ordnung}$$

$$(11.2)\qquad = \sum_{i,k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{\ell,s} a_{\ell s} t_{is} t_{k\ell}\right)}_{\tilde a_{ik}} w_{t_it_k} + \ldots$$

Speziell gilt (vgl. (9.2): $t_\nu = \varphi$, also $t_{\nu s} = \varphi_{x_s}$), also

$$\tilde{a}_{\nu\nu} = \sum_{\ell,s=1}^{n} a_{\ell s}\varphi_{x_s}\varphi_{x_\ell} = (\varphi_{x_1},\ldots,\varphi_{x_n}) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{x_1} \\ \vdots \\ \varphi_{x_n} \end{pmatrix}. \tag{11.3}$$

Dies ist eine quadratische Form, gebildet aus den Koeffizienten der zweiten Ableitungen in L (vgl. (11.1)). Unser einziges Charakterisierungsmerkmal waren bisher die Fälle $\tilde{a}_{\nu\nu} \neq 0$ oder $= 0$ aus den Sätzen 9.3 und 9.4, die wir, zugeschnitten auf Differentialgleichungungen 2. Ordnung, unter Berücksichtigung von (11.3) nochmals wie folgt zusammenfassen.

Satz 11.1
Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für einen quasilinearen Differentialoperator 2. Ordnung

$$Lu(\boldsymbol{x}) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}, u, \operatorname{grad} u) u_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}) + \ldots, \qquad \boldsymbol{x} \in B, \quad u \in C^2(B),$$

und eine Manningfaltigkeit

$$\Phi = \{\boldsymbol{x} \in B;\ \varphi(\boldsymbol{x}) = 0\}, \quad \varphi \in C^2(B), \quad \operatorname{grad}\varphi \neq 0 \text{ in } B,$$

gilt:
(11.4)

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\bar{\boldsymbol{x}}, u, \operatorname{grad} u)\varphi_{x_i}(\bar{\boldsymbol{x}})\varphi_{x_j}(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0 \iff \Phi \text{ ist für } L \text{ in } \bar{\boldsymbol{x}} \text{ charakteristisch bzgl. } u.$$

Diese Charakterisierung ist unabhängig von Koordinatentransformationen.

Satz 11.2
Unter den Voraussetzungen von Satz 11.1 sei $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ eine C^2-Koordinatentransformation des $\mathbb{R}^n$, so daß

$$u(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{t}), \quad \varphi(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{t}) = 0, \quad Lu = \Lambda w = \sum_{i,k=1}^{n} \tilde{a}_{ik} w_{t_i t_k} + \ldots$$

Dann gilt

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\varphi_{x_i x_k} = \sum_{i,k=1}^{n} \tilde{a}_{ik}\psi_{t_i t_k}.$$

Beweis: Übungsaufgabe

Bemerkung: $\boldsymbol{t} \in C^2$ ist nötig, damit die Differentialgleichung transformiert werden kann.

Die Charakterisierung in Satz 11.1 wird durch eine quadratische Form gegeben. Wir untersuchen zunächst, wann der Fall $\tilde{a}_{\nu\nu} \neq 0$ eintritt. Antwort liefert die lineare Algebra.

Definition 11.3
Eine reelle $n \times n$ Matrix A heißt *definit* (*positiv definit*, *negativ definit*), falls für alle $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{z} \neq 0$ gilt

$$\boldsymbol{z}^T A \boldsymbol{z} \ \neq \ (>, \ <) \ 0.$$

Kriterien hierfür liefert

Satz 11.4
Eine symmetrische $n \times n$ Matrix ist positiv (negativ) definit genau dann, wenn alle ihre Eigenwerte positiv (negativ) sind.

Beachtet man, daß $\boldsymbol{z}^T A \boldsymbol{z} = \text{const}\,.$ für eine definite Matrix im $\mathbb{R}^2$ eine Ellipse, im $\mathbb{R}^3$ ein Ellipsoid ist, wird folgende Namensgebung einsichtig.

Definition 11.5
Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(B)$ eine feste Lösung von

$$Lu := \sum_{i,k=1}^n a_{ik}\, u_{x_i x_k} + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} = f, \quad \boldsymbol{x} \in B$$
$$a_{ik} = a_{ik}(\boldsymbol{x}, u, \operatorname{grad} u), \qquad b_j = b_j(\boldsymbol{x}, u, \operatorname{grad} u).$$

1) Dann verhält sich u *elliptisch* in $\bar{\boldsymbol{x}} \in B$, falls für jede $(n-1)$-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit $\Phi \subset B$ mit $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Phi$, diese Mannigfaltigkeit in $\bar{\boldsymbol{x}}$ für L nicht charakteristisch ist. (d.h. die Differentialgleichung (11.4) hat keine Lösung).

2) u heißt *elliptische Lösung*, wenn sie sich in allen $\boldsymbol{x} \in B$ elliptisch verhält.

3) Die Differentialgleichung heißt *elliptisch in* $\bar{\boldsymbol{x}} \in B$, wenn sich alle Lösungen in $\bar{\boldsymbol{x}}$ elliptisch verhalten.

4) Sind die Koeffizienten a_{ik} reine Ortsfunktionen (nur abhängig von $(x_1, \ldots, x_n)$), so heißt der Differentialoperator L bzw. die Differentialgleichung $Lu = f$ elliptisch in $\bar{\boldsymbol{x}}$, falls in $\bar{\boldsymbol{x}}$ keine charakteristische Mannigfaltigkeit existiert.

Aus Satz11.4 und Definition 11.5 folgt damit sofort

Satz 11.6
Eine Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$ ist genau dann elliptisch in $\bar{\boldsymbol{x}} \in B$, wenn die Koeffizientenmatrix

$$A(\bar{\boldsymbol{x}}, u(\bar{\boldsymbol{x}}), \partial^\alpha u(\bar{\boldsymbol{x}})) = \Big(a_{ik}(\bar{\boldsymbol{x}}, u(\bar{\boldsymbol{x}}), \partial^\alpha u(\bar{\boldsymbol{x}}))\Big)_{ik}, \quad |\alpha| = 1$$

lauter positive oder lauter negative Eigenwerte hat.

Dies ist eine vollständige Charakterisierung für den Fall „A definit".
Sind alle Eigenwerte der Matrix ungleich Null und hat ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als alle anderen, so stellt $\boldsymbol{z}^T A \boldsymbol{z} = \text{const}$. im $\mathbb{R}^2$ eine Hyperbel, im $\mathbb{R}^3$ ein Hyperboloid dar, ist ein Eigenwert =0, so erhält man eine Parabel bzw. ein Paraboloid. Daher können wir weiter erklären

Definition 11.7
Für eine feste Lösung u von $Lu = f$ (vgl. Definition 11.5) seien
$\lambda_i, i = 1, \ldots, n$ die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix $A(\bar{\boldsymbol{x}}, u(\bar{\boldsymbol{x}}), \partial u(\bar{\boldsymbol{x}}))$.

Dann heißt u

1) *hyperbolisch in* $\bar{\boldsymbol{x}}$, falls:

   $\lambda_j > 0$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $\lambda_k < 0$ für alle $k \neq j$,
   oder
   $\lambda_j < 0$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $\lambda_k > 0$ für alle $k \neq j$.

2) *ultrahyperbolisch in* $\bar{\boldsymbol{x}}$, falls alle $\lambda_i \neq 0$ und mindestens 2 Eigenwerte > 0 und mindestens 2 Eigenwerte < 0 sind (dazu ist $n \geq 4$ nötig).

3) *parabolisch in* $\bar{\boldsymbol{x}}$, falls mindestens ein $\lambda_j = 0$ ist.

Entsprechend Definition 11.5 erklären wir weiter.

Zeigt eine Lösung in allen Punkten ihres Definitionbereiches gleiches Verhalten, so heißt die Lösung von dem entsprechenden Typ.
Verhalten sich alle Lösungen in $\bar{\boldsymbol{x}}$ gleich, so heißt die Differentialgleichung von dem Typ in $\bar{\boldsymbol{x}}$.
Verhalten sich alle Lösungen im gesamten Definitionsbereich gleich, so heißt die Differentialgleichung von dem Typ schlechthin.

Bemerkungen
1) Im linearen Fall ist die Charakterisierung der Differentialgleichung und des Differentialoperators unabhängig von speziellen Lösungen.
2) Auf Grund der Einteilung ist folgende Namensgebung einsichtig:

   $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\boldsymbol{x}, u) u_{x_i x_j}(\boldsymbol{x})$ heißt *Hauptteil der Differentialgleichung* $Lu = f$.

Zunächst soll untersucht werden, welche Auswirkungen diese Sätze und Definitionen im $\mathbb{R}^2$ haben.

Sei L ein (quasi) linearer Differentialoperator in einem Gebiet B $\subseteq \mathbb{R}^2$:

$$Lu = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + \text{ Terme niedriger Ordnung} \tag{11.5}$$

Die zugehörige Koeffizientenmatrix lautet

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad A = A(\boldsymbol{x}, u(\boldsymbol{x}), \partial u(\boldsymbol{x})).$$

Ihre Eigenwerte bestimmen sich aus

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = ac - \lambda(a+c) + \lambda^2 - b^2 = 0$$

also

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + b^2}}{2}. \tag{11.6}$$

Aus der 2. Gleichung folgt, daß es keine komplexen Eigenwerte gibt, aus der 1. Gleichung erhält man

$$\begin{array}{llllll}
I)\ \det(A) = & ac - b^2 > 0 & \Longrightarrow & \operatorname{sgn} \lambda_{1,2} = \operatorname{sgn}(a+c) & \Longrightarrow & \text{Dgl. elliptisch} \\
II) & ac - b^2 < 0 & \Longrightarrow & \operatorname{sgn} \lambda_1 = -\operatorname{sgn} \lambda_2 & \Longrightarrow & \text{Dgl. hyperbolisch} \\
III) & ac - b^2 = 0 & \Longrightarrow & \operatorname{sgn} \lambda_1 = 0 & \Longrightarrow & \text{Dgl. parabolisch}
\end{array}$$

Diese vollständige Charakterisierung der Gleichungstypen durch das Vorzeichen der Determinante ist nur im $\mathbb{R}^2$ möglich.

Beispiele für

elliptisch: Laplace-Operator: $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $a = c = 1$, $b = 0$.

hyperbolisch: Wellenoperator: $\Box u = u_{yy} - u_{xx}$ mit $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ oder $Lu = u_{xy}$ mit $a = c = 0$, $b = 1$.

parabolisch: Wärmeleitungs- oder Diffusionsoperator: $Lu = u_y - u_{xx}$, $a = -1$, $b = c = 0$.

Nach diesen Beispielen erhebt sich die Frage nach der

Invarianz der Klassifizierung gegenüber Koordinatentransformationen

Beachte: Das ist (im $\mathbb{R}^2$) weitergehender als Satz 11.2. Dort wird nur die charakteristische Mannigfaltigkeit als unabhängig von einer Koordinatentransformation nachgewiesen.

Für den Fall $n = 2$ rechnet man das einfach nach.
Für den Differentialoperator L aus (11.5) transformieren wir:

$$\xi = \xi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y), \qquad u(x, y) = w(\xi, \eta).$$

Es folgt

$$Lu = \Lambda w = \alpha w_{\xi\xi} + 2\beta w_{\xi\eta} + \delta w_{\eta\eta} + \dots,$$

man rechnet nach (vgl. (11.2))

$$\begin{aligned}
\alpha &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\
\beta &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y \\
\delta &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2
\end{aligned}$$

und erhält durch schlichtes Einsetzen

$$\alpha\delta - \beta^2 = (ac - b^2) \quad \underbrace{(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2}_{\substack{\neq 0, \\ \text{Funktionaldeterminante} \\ \text{der} \\ \text{Koordinatentransformation}}}$$

Damit ist für $\mathbb{R}^2$ alles bewiesen, weil die Klassifizierung auf Grund des Vorzeichens der Koeffizientendeterminante eindeutig ist.

Hinweis für den allgemeinen Fall $\mathbb{R}^n$:

Eine symmetrische, quadratische Form $Q(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{z}^T A \boldsymbol{z}$ läßt sich durch eine sogenannte Hauptachsentransformation in eine kanonische Form bringen

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \eta_i^2 \quad \text{mit} \quad \kappa_i = \pm 1$$

und die Anzahl der negativen κ_i, der sogenannte Trägheitsindex, ist eine affine Invariante. Daher ist die Klassifizierung der Differentialgleichungen unabhängig vom Koordinatensystem.

Bemerkung: Eine Diagonalform für symmetrische Matrizen erreicht man konstruktiv mit dem Jakobi-Verfahren. Danach braucht man nur noch eine Streckung (Stauchung) der Koordinatenachsen.

Auswirkungen von Satz 11.1 (im $\mathbb{R}^2$)

I) Bei *elliptischen Differentialgleichungen* gibt es keine charakteristischen Mannigfalltigkeiten (Definition 11.5). Dies gilt auch unabhängig von der Raumdimension.

II) *Hyperbolische Differentialgleichung*: Die Bedingung von Satz 11.1 besagt für L (aus (11.5)):

$$a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0. \tag{11.7}$$

Es ist $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$, sei z.B. $\varphi_y \neq 0$ in $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt nach dem Satz über implizite Funktionen $0 = \varphi(x,y) = y - y(x)$ in einer Umgebung $U(\bar{x},\bar{y})$. Dann folgt aus (11.7) wegen $\varphi_x = -y',\ \varphi_y = 1$

$$a(y'(x))^2 - 2by'(x) + c = 0, \qquad \text{oder}$$

$$y'(x) = \frac{+b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \qquad a \neq 0, \tag{11.8}$$

Ist $c \neq 0$, so erhält man entsprechend

$$x'(y) = \frac{+b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c},$$

d.h. es gibt 2 Scharen von charakteristischen Mannigfaltigkeiten.

Beispiele

1) $\Box u = u_{yy} - a^2 u_{xx}$ (vgl. § 5)

$$y'(x) = \frac{\pm\sqrt{a^2}}{a^2} = \pm\frac{1}{a} \quad\Rightarrow\quad y(x) = \pm\frac{1}{a}x - c, \quad c = \text{const}$$

oder

$$x \pm ay = \text{const}\,.$$

Das sind die Charakteristiken, die wir aus der d'Alembert'schen Lösung kennen. Auf ihnen dürfen keine Cauchy'schen Anfangswerte (Funktion und Ableitung) vorgegeben werden (vgl. Übungen).

2) $a = 0: \quad Lu = u_{xy} \quad \overset{(11.7)}{\Longrightarrow} \quad \varphi_x\varphi_y = 0.$

Damit sind $\varphi_x = 0$ und $\varphi_y = 0$ mögliche Differentialgleichungen und man erhält zwei Scharen von Charakteristiken: $x = \text{const}\,.$ und $y = \text{const}\,.$, d.h. Parallelen zu den Koordinatenachsen.
Charakteristische Anfangswertaufgabe: Man kann auf zwei verschiedenen Charakteristiken Funktionswerte vorgeben (keine Cauchy'schen Anfangswerte) und erhält eine eindeutige Lösung (vgl. Übungen.)

III) *Parabolische Differentialgleichung:* $ac - b^2 = 0$. Dann erhält man aus (11.8) *eine* Schar von Charakteristiken.

Beispiel: $Lu = u_y - u_{xx} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 0,$
$y = \text{const}\,.$

d.h. Parallelen zur x-Achse sind charakteristische Mannigfaltigkeiten.

Anwendung: Satz 9.4 besagt insbesondere, daß eine AWA mit Cauchy'schen Anfangswerten nur dann lösbar oder eindeutig lösbar ist, wenn die Anfangswertmannigfaltigkeit nicht charakteristisch ist. (Wir wissen aus Definition 11.5, daß im elliptischen Fall gar keine Charakteristiken existieren). Da $t = 0$ für die Wärmeleitungsgleichung charakteristisch ist, hat sie, bei Vorgabe von Cauchy'schen Anfangsdaten auf $t = 0$, keine oder keine eindeutige Lösung, d.h.:

Die Cauchy'sche AWA für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{array}{lcl} u_t & = & u_{xx} + f \\ u(x,0) & = & \varphi(x), \\ u_t(x,0) & = & \psi(x) \end{array}$$

ist nicht sachgemäß (was auch unserer physikalischen Erfahrung entspricht).

Daß unsere Typeneinteilung von Differentialgleichungen, die sich auf einzelne Punkte $\bar{x}$ bezog, nicht allgemein gültig ist, zeigt das Beispiel der Differentialgleichung von Tricomi:

$$x^m u_{yy} + u_{xx} - u_y = 0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \text{ ungerade.}$$

Sie ist

$$\begin{array}{lll} \text{elliptisch} & \text{für} & x > 0, \\ \text{hyperbolisch} & \text{für} & x < 0, \\ \text{parabolisch} & \text{für} & x = 0. \end{array}$$

Leider gibt's das auch in der Praxis, Beispiel: Strömungslehre. Dort gibt es Differentialgleichungen, die für Überschallgeschwindigkeit hyperbolisch, für Unterschallgeschwindigkeit elliptisch und für Schallgeschwindigkeit parabolisch sind.

Zur Klassifizierung von Systemen von Differentialgleichungen und Differentialgleichungen höherer Ordnung vgl. Courant Hilbert II, Bers/John/Schechter usw.

Fortpflanzung von Unstetigkeiten längs Charakteristiken, Wellenfronten

Der folgende Abschnitt befaßt sich mit schwächeren Lösungsbegriffen. Wir wissen, daß es Differentialgleichungen p-ter Ordnung gibt, die nicht notwendig eine C^p- Lösung haben, $v_{\xi\eta} = 0$ ist ein bekanntes Beispiel.

Wir betrachten allgemeiner folgender Situation: Für eine Differentialgleichung p-ter Ordnung $Lu = f$ werden auf einer Mannigfaltigkeit Φ Cauchy-Daten vorgegeben. Durch eine Transformation $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$, $u(\boldsymbol{x}) = w(\boldsymbol{t})$, $Lu = \Lambda w$ werde Φ zur Koordinatenhyperebene. Ist dann L ein innerer Differentialoperator bzgl. Φ, so kann Lu, bzw. Λw, rein aus den Cauchy-Daten berechnet werden, und die p-te Ableitung ist nicht festgelegt. Wenn die Differentialgleichung überhaupt eine Lösung hat, kann diese deshalb Unstetigkeiten in der p-ten Ableitung besitzen. Dies motiviert folgende Verallgemeinerung des Lösungsbegriffs und auch die daraus mit Hilfe von Satz 9.4 folgende Aussage:

Definition und Satz 11.8
In einem Gebiet $B \subset \mathbb{R}^n$ sei $Lu = f,\ f \in C(B)$ eine Differentialgleichung der Ordnung p.
Sei $\overline{B} = \overline{Q}_1 \cup \overline{Q}_2,\ Q_1 \cap Q_2 = \emptyset,\ \ Q_i$ offen und $\Phi = \partial Q_1 \cap \partial Q_2$ eine $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit der Ordnung p.
Dann heißt u eine Lösung von $Lu = f$, falls

$$\begin{aligned}
& u \in C^{p-1}(B), \quad u_i = \text{Rest}\ u|_{Q_i} \in C^p(Q_i \cup \Phi), \quad i = 1,2, \\
& Lu(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in Q_1 \cup Q_2. \\
& (\Rightarrow Lu_i = f \text{ auf } Q_i \cup \Phi \quad \text{durch stetige Ergänzung})
\end{aligned}$$

Mit diesem Lösungsbegriff gilt

$u \notin C^p(B) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi$ ist in den Unstetigkeiten der p-ten Ableitung charakteristisch für L.

Dieser Lösungsbegriff wird durch die distributionellen Lösungen bestätigt werden.

Anwendung auf Wellenfronten

Zeichnen wir für ein $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ eine Koordinate, z.B. $x_n = t$, als Zeitkoordinate aus, so stellt $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) = 0,\ \operatorname{grad} \varphi_{\boldsymbol{x}} \neq 0,\ \boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_{n-1})$, eine wandernde Fläche im $\mathbb{R}^{n-1}$ dar.

Definition 11.9
Die Mannigfaltigkeit $\Phi = \{(x_1,\ldots,x_m,t) \in \mathbb{R}^{m+1};\ \varphi(x_1,\ldots,x_m,t) = 0\}$ heißt *Wellenfront einer Welle* $u(x_1,\ldots,x_m,t)$, falls

$$\begin{aligned} u(x_1,\ldots,x_m,t) &= 0 \quad \text{für} \quad \varphi(x_1,\ldots,x_m,t) \ge 0,\\ u(x_1,\ldots,x_m,t) &\ne 0 \quad \text{für fast alle} \quad (x_1,\ldots,x_m,t) \text{ mit } \varphi(x_1,\ldots,x_m,t) < 0. \end{aligned}$$

Ist nun u Lösung einer Differentialgleichung $Lu = f$, dann gibt der vorige Satz Bedingungen dafür an, daß die Wellenfront eine charakteristische Mannigfaltigkeit für L ist. üblicherweise wird dann vorausgesetzt, daß die Mannigfaltigkeit wenigstens die gleiche Differenzierbarkeitsordnung aufweist wie die Differentialgleichung.

Beispiel: Die Transportgleichung

$$Lu(\boldsymbol{x},t) = u_t + \boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}_{\boldsymbol{x}} u = 0, \quad \boldsymbol{v},\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \tag{11.9}$$

beschreibt den Transport einer Erregung, die sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegt. Wie man sich durch Einsetzen überzeugt, (man kann die Lösung gemäß § 10 direkt ausrechnen) ist für differenzierbares w

$$w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t) = w(x_1 - v_1 t,\ldots,x_m - v_m t) \tag{11.10}$$

eine Lösung der Differentialgleichung, also eine Wellenbewegung (vgl. die Lösungen der Wellengleichung).

Betrachtet man für (11.9) die AWA

$$u(\boldsymbol{x},0) := w(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} 1 - |\boldsymbol{x}|, & \text{falls } |\boldsymbol{x}| \le 1,\\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so erhalten wir eine Lösung dieser Aufgabe (im Sinn von Definition 11.8) durch

$$u(\boldsymbol{x},t) = w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t) = \begin{cases} 1 - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t|, & \text{falls } |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t| \le 1,\\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie ist stetig aber nur stückweise stetig differenzierbar.

Offensichtlich ist $\Phi = \{(x,t);\ \varphi(x,t) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t|^2 - 1 = 0\}$ eine Wellenfront für u, denn $\varphi \in C^1$. Φ ist auch charakteristische Mannigfaltigkeit, denn φ ist Lösung der charakteristischen Gleichung (10.2), denn für die Differentialgleichung

$$Lu = u_t + \boldsymbol{v}\,\mathrm{grad}_x u = u_t + \sum_{i=1}^m v_i u_{x_i} = 0$$

lautet sie

$$\varphi_t + \sum_{i=1}^m v_i \varphi_{x_i} = 0,$$

und

$$\varphi(\boldsymbol{x},t) = w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}t|^2 - 1, \quad (w \in C^1 \text{ genügt})$$

ist Lösung. $\varphi(\boldsymbol{x},t) = 0$ stellt für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ eine *wandernde* Sphäre dar.

Kapitel IV

Distributionen, distributionelle Lösungen, Fourier-Transformationen

§ 12 Motivation (im $\mathbb{R}^1$)

Die Diskussion der Wellengleichung zeigte, daß unser *Ableitungsbegriff* unzureichend war. ($\omega_{\xi\eta} = 0$ hatte Lösungen in C^1, die äquivalente Gleichung $u_{xx} - u_{yy} = 0$ brauchte Lösungen in C^2).
Auch unser *Lösungsbegriff* $u \in C^2$ war unbefriedigend. Er ließ keine Betrachtung von Singularitäten in den Anfangswerten und deren Ausbreitung ins Lösungsgebiet zu. Beide Begriffe wollen wir so verallgemeinern, daß die schon bekannten Eigenschaften erhalten bleiben. Wir betrachten dazu eine gewöhnliche Differentialgleichung im $\mathbb{R}^1$:

$$u'(x) = f(x), \quad f \in C. \tag{12.1}$$

Ist $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\varphi(x) = 0$ für $x \in \complement[a,b]$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, so folgt aus (12.1)

$$u'(x)\varphi(x) = f(x)\varphi(x)$$

und durch Integration

$$\int_{\mathbb{R}} u'(x)\varphi(x)\;dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\;dx. \tag{12.2}$$

Die Integrale existieren, da φ außerhalb von $[a,b]$ verschwindet. Wir formen (12.2) durch partielle Integration um

$$\int_{\mathbb{R}} u'(x)\varphi(x)\;dx = \int_a^b u'(x)\varphi(x)\;dx = \underbrace{u(x)\varphi(x)\Big|_a^b}_{\substack{=0,\text{ da}\\ \varphi(a)=\varphi(b)=0}} - \int_a^b u(x)\varphi'(x)\;dx \tag{12.3}$$

$$\overset{(12.2)-(12.3)}{\Longrightarrow}$$

$$-\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{12.4}$$

Dies ist eine Form der Differentialgleichung (12.1), in welcher die Ableitung von u gar nicht mehr vorkommt. Daran läßt sich ein neuer Lösungsbegriff knüpfen.

u heißt *verallgemeinerte Lösung von (12.1)*, wenn (12.4) gilt für alle $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, die außerhalb einer kompakten Menge verschwinden.

Offensichtlich ist jede *klassische Lösung* von (12.1) eine Lösung von (12.4) und jede Lösung von (12.4), die $\in C^1$ ist, erfüllt auch (12.1), denn aus (12.4) folgt (12.2), und hieraus mit einem kleinen indirekten Beweis unter Verwendung, daß man positive $\varphi \in C^1$ konstruieren kann mit beliebig kleinem Träger.

Daran knüpfen sich eine Reihe von Fragen und Beobachtungen:

1) Ist dieser Lösungsbegriff wirklich allgemeiner?

2) Wie sieht ein Analogon für kompliziertere, insbesondere partielle Differentialgleichungen aus?

3) Was für Funktionen φ benötigt man?

4) Was für ein Ableitungsbegriff steckt hinter diesem Lösungsbegriff? Das u in (12.4) kann ja Singularitäten haben.

5) Was tritt an die Stelle der partiellen Integration bei partiellen Differentialgleichungen?

6) Die beiden Seiten von (12.4) können als lineare Funktionale (d.h. Abbildungen von Funktionen nach $\mathbb{R}$) aufgefaßt werden, die von u und f erzeugt werden und die auf φ wirken.)

Diesen Fragen und Ideen werden wir in den nächsten Paragraphen nachgehen.

§ 13 Distributionen

Im weiteren benutzen wir folgende

Bezeichnungen:
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine offene Menge.
Für $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ erklären wir den Träger von φ : $\operatorname{Tr}\varphi := \overline{\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0\}}$,
(Abschluß bzgl. $\mathbb{R}^n$). Englische Bezeichnung: Tr = supp (von support = Träger).

$C_0^\infty(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega);\ \operatorname{Tr}\varphi$ kompakt $\subset \Omega\}$,

$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ heißt *Testfunktion*.

Bemerkung: Man findet in der Literatur verschiedentlich auch die Bezeichnung

$$C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega).$$

Der Gebrauch ist jedoch uneinheitlich. Üblicherweise bezeichnet man mit $C_0^\infty(\Omega)$ den Raum aller Testfunktionen über Ω und mit $\mathcal{D}(\Omega)$ den topologischen Raum $(C_0^\infty(\Omega), \mathcal{T})$, wobei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $C_0^\infty(\Omega)$ ist, die als zugehörigen Grenzwertbegriff den der Schwarz'schen Nullfolge (vgl. Definition 13.1) hat. Wir führen die Topologie hier nicht ein, sondern begnügen uns mit dem Grenzwertbegriff, der für unsere Zwecke ausreichend ist.

Insbesondere benutzen wir die

Kurzschreibweise: $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (vgl. Definition 13.2).

Definition 13.1
Eine Folge $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ heißt *Schwarz'sche Nullfolge*, wenn gilt:

1) $\exists K \subset \Omega,\ K$ kompakt : $\operatorname{Tr}\varphi_j \subset K \quad \forall j$
2) $\sup |\partial^\alpha \varphi_j| \xrightarrow{j\to\infty} 0 \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Bezeichnung: $\varphi_j \xrightarrow{S} 0$.

Beispiel einer Testfunktion

(13.1) $$\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\boldsymbol{x}^2 - a^2}}, & \text{falls } |\boldsymbol{x}| < a,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{x}^2 = \sum x_i^2 \\ 0, & \text{falls } |\boldsymbol{x}| \geq a. \end{cases}$$

Beweis: Übungsaufgabe

Definition 13.2
Eine *Distribution* u ist ein lineares Funktional

$$u : \begin{cases} C_0^\infty(\Omega) & \to \quad \mathbb{R} \\ \varphi & \to \quad u(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle \end{cases}$$

$$\langle u, \alpha\varphi + \beta\psi \rangle = \alpha \langle u, \varphi \rangle + \beta \langle u, \psi \rangle , \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

mit der Eigenschaft

$\forall K \subset \Omega$, K kompakt, gibt es Konstanten $C \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, sodaß

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K). \tag{13.2}$$

Ist k unabhängig von K, so heißt u *von der Ordnung* k.

Die Menge $\mathcal{D}'(\Omega)$ aller Distributionen wird zu einem linearen Raum, dem *Dualraum zu* $\mathcal{D}(\Omega)$, vermittels

$$\langle \alpha u + \beta v, \varphi \rangle = \alpha \langle u, \varphi \rangle + \beta \langle v, \varphi \rangle .$$

Satz 13.3 Stetigkeit
Ein lineares Funktional u auf $C_0^\infty(\Omega)$ ist eine Distribution genau dann, wenn gilt:

$\langle u, \varphi_j \rangle \xrightarrow{j\to\infty} 0$ für jede Folge $\{\varphi_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit der Eigenschaft

$$\exists K \subset \Omega,\ K \text{ kompakt}:\ \operatorname{Tr} \varphi_j \subset K \quad \forall j \qquad \text{und}$$
$$\sup |\partial^\alpha \varphi_j| \xrightarrow{j\to\infty} 0 \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

oder kürzer:

$$u \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle u, \varphi_j \rangle \xrightarrow{j\to\infty} 0 \quad \forall \text{ Schwarz'schen Nullfolgen } \{\varphi_j\}.$$

Bemerkung: Hier wird die Folgenstetigkeit bewiesen. Man kann jedoch zeigen, daß die Distributionen auch bzgl. der (hier nicht eingeführten) Topologie stetig sind.

Beweis:
„ $\Rightarrow$ “ folgt aus (13.2)
„ $\Leftarrow$ “ (indirekt) Annahme: $\exists K \subset \Omega$, K kompakt: $\forall C \wedge k\ \exists \varphi_j \in C_0^\infty(K)$, sodaß (13.2) nicht gilt.
Wählt man insbesondere $C = k = j$, so heißt das

$$|u(\varphi_j)| > j \sum_{|\alpha| \leq j} \sup |\partial^\alpha \varphi_j|.$$

Diese Ungleichung kann mit Konstanten multipliziert werden. Wir können also Œ

$u(\varphi_j) = 1$ wählen. Dann folgt

$$\frac{1}{j} > |\partial^\alpha \varphi_j| \xrightarrow{j\to\infty} 0 \quad \forall |\alpha| \le j \quad \Rightarrow \quad \varphi_j \xrightarrow{j\to\infty} 0,$$

aber $u(\varphi_j) = \langle u, \varphi_j \rangle = 1$ konvergiert nicht gegen Null. W! zur Voraussetzung. ∎

Bei- und Gegenbeispiel zu Schwarz'schen Nullfolgen:
Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\varphi(\boldsymbol{x})$ gilt $\varphi_n \xrightarrow{S} 0$ aber
$\psi_n(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{n}\right)$ erfüllt nicht: $\operatorname{Tr}\psi_n \subset K$, also $\psi_n \overset{S}{\not\longrightarrow} 0$.

Satz 13.4 reguläre Distributionen über Ω
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ (d.h. $\int_K |f(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x} < \infty \quad \forall K \subset \Omega$ kompakt) wird durch

$$F(\varphi) = f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{13.3}$$

eine *reguläre Distribution* F (d.h. erzeugt von einem $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$) erklärt.

Beweis:
Für $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ ist $f\cdot\varphi \in L_1(\Omega)$, also ist $f(\varphi)$ erklärt. Die Linearität ist offensichtlich, die Stetigkeit folgt aus

$$|f(\varphi)| \le \max_{\boldsymbol{x}\in\operatorname{Tr}\varphi} |\varphi| \int_{\operatorname{Tr}\varphi} |f(\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{x}, \quad \text{(vgl. (13.3))}.$$

∎

Bemerkung: Im regulären Fall unterscheidet man die Bezeichnungen f und F nicht, da man zeigen kann, daß die Werte der Distribution F die Funktion f eindeutig (im Sinne Lebesgue-integrierbarer Funktionen) festlegen und umgekehrt, d.h. für zwei reguläre Distributionen F_1, F_2 und die sie erzeugenden Funktionen f_1 und f_2 gilt

$$F_1 = F_2 \Leftrightarrow f_1(\boldsymbol{x}) = f_2(\boldsymbol{x}) \quad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Distributionen, die nicht durch ein $f \in L_{\text{loc}}(\Omega)$ erzeugt werden, heißen **singuläre Distributionen**.

Beispiel 1) Die Dirac-Distribution („δ-Funktion")
Physikalischer Hintergrund: Ist $d(\boldsymbol{x})$ eine (elektrische) Ladungsdichte im Raum, so erhält man die in einem Volumen V enthaltene Ladung Q durch Integration über V

$$Q = \int_V d(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Problem: Wie erhält man die in einem Punkt $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ konzentrierte Einheitsladung aus der entsprechenden Ladungsdichte $\delta_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi} \\ 0, & \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\xi} \end{cases}$?

Beschreibung durch eine Integration $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 1$ ist nicht möglich.

Wir erklären $\delta_{\boldsymbol{\xi}}$ als Distribution durch

(13.4)
$$\begin{aligned} \langle \delta_{\boldsymbol{\xi}}, \varphi \rangle &= \varphi(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \Omega, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \\ \text{bzw.} \quad \langle \delta, \varphi \rangle &= \varphi(\mathbf{0}) \quad \text{falls} \quad \mathbf{0} \in \Omega. \end{aligned}$$

Übung: Zeige, daß durch (13.4) eine nicht reguläre Distribution erklärt wird.

Bemerkung: Gelegentlich findet man in Büchern die

symbolische Schreibweise $\langle \delta_{\boldsymbol{\xi}}, \varphi \rangle = \int \delta_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$.

Man lasse sich durch das Integral nicht dazu verführen, dies für eine reguläre Distribution zu halten.

Beispiel 2)
Ist ϕ eine glatte Hyperfläche im Ω und $a \in L_{\text{loc}}(\phi)$ (bzgl. des Lebesgue'schen Oberflächenmaßes), so ist die

Distribution einer Oberflächenladung

$$\langle F, \varphi \rangle = \int\limits_{\phi} a(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x})\, ds_x \quad (ds_x \mathrel{\widehat{=}} \text{Oberflächenelement von } \phi)$$

eine singuläre Distribution. Im Spezialfall

(13.5)
$$\langle F, \varphi \rangle = \int\limits_{S_r} \varphi(\boldsymbol{x})\, ds_x, \quad S_r = \text{Sphäre } \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ |\boldsymbol{x}| = r\},$$

wird F gelegentlich mit $\delta(|\boldsymbol{x}| - r)$ oder $\delta(r - |\boldsymbol{x}|)$ bezeichnet.
(„a standard abuse of notation“, Renardy/Rogers, S. 157).

Beachte: Operationen mit Distributionen werden so erklärt, daß sie im Falle regulärer Distributionen mit den durch (13.3) aus Satz 13.4 bedingten Integraloperationen übereinstimmen (*Permanenzprinzip*). Wir untersuchen das im nächsten Abschnitt.

Lineare Substitution, Multiplikation und Differentiation bei Distributionen

Sei $\quad \mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{y} = \mathbf{T}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \det \mathbf{A} \neq 0, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n\,.$

Für $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ist auch $g \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) : g(\boldsymbol{x}) = f(\mathbf{A}\boldsymbol{x} + b)$, und mit Hilfe der Substitutionsregel für Integrale folgt für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (beachte $\det \mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1}$)

$$\begin{aligned}
\langle g(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle &= \langle f(\mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle = \int f(\mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b})\varphi(\boldsymbol{x})\; d\boldsymbol{x} \\
&= |\det \mathbf{A}|^{-1} \int f(\boldsymbol{y})\varphi(\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}))\; d\boldsymbol{y} \\
&= |\det \mathbf{A}^{-1}| \left\langle f(\boldsymbol{y}), \varphi(\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}))\right\rangle .
\end{aligned}$$

Diese Gleichung nehmen wir als Anlaß zur

Definition 13.5 lineare Substitution bei Distributionen
Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det \mathbf{A} \neq 0$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ definiert man

(13.6) $$\langle f(\mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle := |\det \mathbf{A}|^{-1} \left\langle f(\boldsymbol{x}), \varphi(\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}))\right\rangle .$$

Bemerkung zur Schreibweise
$\langle f(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle$ bedeutet nicht, daß $\boldsymbol{x}$ ein Argument der Distribution ist, sondern, daß f bzgl. der Variablen $\boldsymbol{x}$ auf die Testfunktion φ wirkt. Die Schreibweise (13.6) bedeutet: Ist $\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = f(\mathbf{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})$, so ist für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ auch $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \varphi(\mathbf{A}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}))$, $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, und die Gleichung besagt

$$\left\langle \tilde{f}, \varphi \right\rangle = |\det A|^{-1} \langle f, \tilde{\varphi}\rangle .$$

Das Permanenzprinzip besagt, daß alle Definitionen für Distributionen so gefaßt werden, daß im Falle regulärer Distributionen Alt-Bekanntes rauskommt.
Praktisch bedeutet das, daß alles Ungemach, das der Distribution widerfährt, auf die Testfunktion abgewälzt wird.

Spezialfall 1) Translation $(\mathbf{A} = \mathbf{I})$
Für $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle u(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle = \langle u(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a})\rangle .$$

Speziell für die δ-Distribution $\langle \delta(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle = \varphi(\mathbf{0})$ bedeutet dies

(13.7) $$\langle \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle = \langle \delta(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi})\rangle = \varphi(\boldsymbol{\xi}),$$

$$\text{also} \qquad \delta_{\boldsymbol{\xi}} = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}), \quad \text{als gebräuchlichere Schreibweise.}$$

Spezialfall 2) Streckung: $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I}$, $\lambda \neq 0$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$

$$\langle F(\lambda\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle = |\lambda|^{-n} \left\langle F(\boldsymbol{x}), \varphi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\lambda}\right)\right\rangle .$$

Multiplikation von Distributionen

ist im allgemeinen nicht möglich, da z.B.
$u(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, $u \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, aber $\int_{-1}^{1} u^2(x)\, dx \not< \infty$, also $u^2 \notin L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ und nicht immer $\int u^2(x)\varphi(x)\, dx < \infty$ für $[-1,1] \subset \text{Tr}(\varphi)$.

Multiplikation mit einer C^∞-Funktion

Wir definieren

$$(13.8) \qquad \langle af, \varphi\rangle := \langle f, a\varphi\rangle = \int f(\mathbf{x}) \underbrace{a(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})}_{\in \mathcal{D}(\Omega)}\, d\mathbf{x} \quad \text{für } f \in \mathcal{D}'(\Omega),\ a \in C^\infty(\Omega).$$

Die Linearität in (13.8) ist offensichtlich und die Stetigkeit gemäß (13.2) und Satz 13.3 auch, da mit φ auch $a\varphi$ eine Testfunktion ist.
(Man kann obige Definition ausweiten auf $a \in C^m(\Omega)$, $m = 0, 1, \ldots$, vgl. Szmydt § 6.)

Beachte: Die Integralschreibweise macht natürlich nur für reguläre Distributionen Sinn. Sie wird in der Literatur aber gelegentlich als *verallgemeinerte Schreibweise* benutzt. Man muß deshalb immer darauf achten, ob wirklich Integrale gemeint sind, damit man nicht irrtümlich singuläre Distributionen für regulär hält.

Differentiation von Distributionen

Für $u \in C^1(\Omega)$ ist $\partial_i u = \frac{\partial}{\partial x_i} u \in L_{\text{loc}}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\langle \partial_i u, \varphi\rangle = \int \partial_i u(\mathbf{x}) \cdot \varphi(\mathbf{x})\, d\boldsymbol{x} = -\int u\, \partial_i\varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Dies beweist man entweder mit partieller Integration bzgl. x_i (der integralfreie Term ist $= 0$, da $\text{Tr}\,\varphi =: K$ kompakt, z.B. ein n-dimendionaler Würfel) oder aufwendiger mit Gauß :

$$\int_K (\partial_i u)\, \varphi\, d\boldsymbol{x} + \int_K u\, \partial_i \varphi\, d\boldsymbol{x} = \int_K \partial_i(u\,\varphi)\, d\boldsymbol{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß}}}{=} \int_{\partial K} u(\boldsymbol{x})\, \varphi(\boldsymbol{x})\, \nu_i\, d\boldsymbol{o} = 0,$$

da φ auf ∂K verschwindet.

Wir **definieren** deshalb

$$(13.9) \qquad \langle \partial_i u, \varphi\rangle := -\langle u, \partial_i\varphi\rangle, \quad u \in \mathcal{D}',\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Man sieht sofort, daß dadurch eine Distribution erklärt wird wegen $\partial_i\varphi \in \mathcal{D}$.

Beispiel 1): Für die Heaviside-Funktion $H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ gilt
(13.10)

$$\langle H'(x), \varphi(x)\rangle = -\langle H(x), \varphi'(x)\rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x)\rangle, \text{ also } H' = \delta.$$

Beispiel 2): Für $f \in C^1(\Omega)$ wird die distributionelle Ableitung erzeugt durch $\partial_i f$ (vgl. oben).

Als Verallgemeinerung von (13.9) erhält man für $f \in \mathcal{D}'$

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \ \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

und damit den

Satz 13.6 von der heilen Welt
Jede Distribution f besitzt Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Diese sind unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation:

(13.11) $$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \ \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Beweis: Alles auf die Testfunktion abwälzen. ■

In Zusammenhang mit partiellen Differentialgleichungen fragt man, wie Differentialoperatoren für Distributionen zu erklären sind.

Sei

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \ a_\alpha \in C^\infty.$$

Dann gilt für jeden Summanden gemäß (13.11) und der Multiplikationsregel (13.8)

(13.12) $$\langle a_\alpha \partial^\alpha u, \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha u, a_\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha (a_\alpha \varphi) \rangle, \quad u \in \mathcal{D}', \ \alpha \in C^\infty.$$

Wir nehmen diese Gleichung zum Anlaß für die

Definition 13.7 adjungierter Differentialoperator
Der zum linearen Differentialoperator

$$L = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \partial^\alpha, \quad a_\alpha \in C^k(\Omega)$$

adjungierte Differentialoperator L^* wird definiert durch

(13.13) $$L^*[u] = \sum_{|\alpha| \leq k} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha u), \quad u \in C^k(\Omega).$$

Ist

$$L^* = L,$$

so heißt L formal selbstadjungiert.

Gemäß (13.12) kann man nun für eine beliebige Distribution u erklären:

$$(13.14) \qquad \begin{cases} \text{Für} \quad L = \sum\limits_{|\alpha|\leq k} a_\alpha \partial^\alpha, \quad a_\alpha \in C^\infty \quad \text{gilt} \\ \langle L[u](\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle = \langle u(\boldsymbol{x}), L^*[\varphi](\boldsymbol{x})\rangle \,. \end{cases}$$

Auf Grund von (13.14) können wir (und werden wir auch noch) Differentialgleichungen für Distributionen betrachten.

Beispiele für formal selbstadjungierte Operatoren sind

$$\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad \text{und} \quad \Box_c = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_x,$$

nicht aber: $\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$ (Wärmeleitungs- oder Diffusionsoperator).

Man zeigt leicht (Übung) für lineare Differentialoperatoren 2. Ordnung:
Für eine symmetrische Matrix $A = (a_{jk})$ gilt

$$L \text{ selbstadjungiert} \quad \stackrel{Aufgabe}{\Longleftrightarrow} \quad Lu = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + cu.$$

Schließlich führen wir Teilräume von Distributionen ein, die in der Existenztheorie partieller Differentialgleichungen eine Rolle spielen. Hilfreich hierzu ist die

Die Hölder'sche Ungleichung für Integrale
Für $x \in L^p(B) := \{f : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ B$ Lebesgue-meßbar, $\int_B |f(t)|^p\, dt < \infty\}$
$y \in L^q(B)$, $p > 0$, $q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt

$$\int_B |x(t)y(t)|\, dt \leq \left(\int_B |x(t)|^p\, dt \right)^{1/p} \left(\int_B |y(t)|^q\, dt \right)^{1/q}.$$

Für $p = q = 2$ heißt dies *Schwarz'sche Ungleichung.*

Bemerkung: Auf Grund der Hölderschen Ungleichung gilt $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, (d.h. lokal integrierbar in Ω über jedes Kompaktum in Ω)). Deshalb existieren die Integrale in der folgenden Definition

Sobolev Räume

Definition 13.8 Sobolev Räume
Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $1 \le p < \infty$ definieren wir den

$$H^{m,p}(\Omega) := \Big\{ f \in L^p(\Omega);\ \text{Für } |s| \le m \text{ gibt es } f^{(s)} \in L^p(\Omega) \\ \text{mit } \int_\Omega f\, \partial^s \varphi\, dx = (-1)^{|s|} \int_\Omega \varphi\, f^{(s)}\, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Big\}.$$

$f^{(s)}$ heißt *schwache Ableitung* von f.
In $H^{m,p}(\Omega)$ erklären wird die Sobolev-Norm

$$\|f\|_{H^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|s|\le m} \|f^{(s)}\|_{L^p(\Omega)}.$$

Für $p = 2$ sind dies unitäre Räume und die Norm wir erzeugt durch das Skalarprodukt

$$(f, g) = \int \sum_{|s|\le m} f^{(s)}\, g^{(s)}\, dx.$$

Andere Bezeichnungen: $H^{m,p}(\Omega) = W_p^m(\Omega)$, $H^m(\Omega) := H^{m,2}(\Omega) = W^m(\Omega)$.

Bemerkung: Die Sobolev-Räume sind also Räume von regulären Distributionen, deren Ableitungen bis zur p-ten Ordnung regulär sind.

Satz 13.9
Die Räume $H^{m,p}(\Omega)$ sind Banachräume $(1 \le p \le \infty)$, für $p = 2$ Hilberträume.

Beweis:
Zu zeigen ist, daß jede Cauchy-Folge einen Grenzwert hat. Sei $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H^{m,p}(\Omega)$ eine Cauchy-Folge bzl. der $H^{m,p}$-Norm. $\Longrightarrow$ $\{\partial^s f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$ $\forall s :$ $|s| \le m$, (beachte die Normdefinition in $H^{m,p}(\Omega)$)

$$\overset{L^p(\Omega)\text{ vollständig}}{\Longrightarrow} \quad \forall s, |s| \le m\ \exists!\ f^{(s)} \in L^p(\Omega) : \partial^s f_j \to f^{(s)} \text{ in } L^p(\Omega).$$

Nun gilt $\forall f_j$ (vgl. Definition der distributionellen Ableitung)

$$\begin{array}{lrcll} & \displaystyle\int_\Omega f_j\, \partial^s \varphi\, dx & = & (-1)^{|s|} \displaystyle\int_\Omega \varphi\, \partial^s f_j\, dx & \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ |s| \le m, \\ \text{Grenzübergang} & \downarrow {\scriptstyle j\to\infty} & & \downarrow {\scriptstyle j\to\infty} & \\ & \displaystyle\int_\Omega f^{(0)}\, \partial^s \varphi\, dx & = & (-1)^{|s|} \displaystyle\int_\Omega \varphi\, f^{(s)}\, dx & \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ |s| \le m. \end{array}$$

Dieser Grenzübergang darf ausgeführt werden, denn die Hölder'sche Ungleichung besagt, daß die Integrale stetige Abbildungen von $L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ sind:

$$\left| \int_\Omega (f_j - f^{(0)})\, \partial^s \varphi \, dx \right| \;\le\; \int_\Omega |f_j - f^{(0)}|\, |\partial^s \varphi| \, dx \;\le\; \|f_j - f^{(0)}\|_{L^p(\Omega)} \underbrace{\|\partial^s \varphi\|_{L^q(\Omega)}}_{< \infty},$$

entsprechend für das 2. Integral. $\overset{L^p(\Omega)\text{ vollständig}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, f^{(0)} \in H^{m,p}(\Omega)$ mit $\partial^s f_k \to f^{(s)}$ in $L^p(\Omega)$ für $|s| \le m$. ■

Zur späteren Verwendung definieren wir noch Teilräume von $H^{m,p}(\Omega)$ deren Elemente „in einem schwachen Sinn“ auf dem Rand von Ω verschwinden.

Definition 13.10
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \ge 0$, $1 \le p < \infty$. Dann ist

$$\overset{\circ}{H}{}^{m,p}(\Omega) \;:=\; \left\{ f \in H^{m,p}(\Omega);\ \text{es gibt } \{f_k\} \subset C_0^\infty(\Omega) \text{ mit } \|f - f_k\|_{H^{m,p}(\Omega)} \xrightarrow{k\to\infty} 0 \right\}.$$

Andere Bezeichnungen: $\overset{\circ}{H}{}^{m,p} \;=\; H_0^{m,p} \;=\; H_{p,0}^m \;=\; \overset{\circ}{W}{}^{m,p}$

Man kann zeigen, daß $\overset{\circ}{H}{}^{m,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $H^{m,p}(\Omega)$ ist (Übung).

Der Beweis von (13.9) für reguläre Distributionen stützte sich, bei Anwendung des Gaußschen Satzes, wesentlich auf die Tatsache, daß die Randintegrale verschwanden. Für viele Anwendungen ist die Kenntnis dieser Randintegrale wichtig. Bei der Behandlung von Potential- und Wärmeleitungsgleichung benötigt man insbesondere die Greenschen Formeln (Satz 3.10), die dort auf den Laplace-Operator zugeschnitten sind. Um eine entsprechendes Werkzeug auch für allgemeinere Operatoren zur Verfügung zu haben, werden wir im nächsten Paragraphen die 2. Greensche Formel auf allgemeinere Differentialoperatoren erweitern.

§ 14 Greensche Formeln, Konormale

Lemma 14.1 Identität von Lagrange
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $Lu = \sum\limits_{|\alpha|\le r} a_\alpha \partial^\alpha u\,, \quad u, v, a_\alpha \in C^r(B)\,.$
Dann existiert ein vektorieller Bilinearausdruck $\boldsymbol{J}(u,v) \in C^{r-1}(B, \mathbb{R}^n)$, in den nur Ableitungen von u und v bis zur Ordnung $r-1$ eingehen, sodaß gilt

$$vLu - uL^*v \;=\; \operatorname{div} \boldsymbol{J}(u,v) \qquad \textit{Identität von Lagrange} \tag{14.1}$$

Bemerkung:
Sind u, v, a_α komplexwertig, so tritt an die Stelle von (14.1)

$$\overline{v}Lu - u\overline{L^*v} \;=\; \operatorname{div} \boldsymbol{J}(u,v),$$

wobei

$$L^*v \;=\; \sum_{|\alpha|\le r} (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(\overline{a_\alpha}v)$$

zu setzen ist.

Beweis: Lemma 14.1 Wir beschränken uns auf den Fall $r = 2$.
Sei $\quad a_{jk} = a_{kj}\ \forall\, k, j, \quad a_{jk}, b_j, c \in C^2, \quad$ dann gilt

$$Lu \;=\; \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}u_{x_jx_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j} + cu,$$

$$L^*v \;=\; \sum_{j,k=1}^{n} (a_{jk}v)_{x_jx_k} - \sum_{j=1}^{n} (b_jv)_{x_j} + cv,$$

$$vLu - uL^*v \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(va_{jk}u_{x_k} - u(a_{jk}v)_{x_k}\right) + b_juv \right\}}_{J_j(u,v)}, \tag{14.2}$$

und damit die Behauptung.

Eine offensichtliche Folgerung aus Lemma 14.1 mit dem Satz von Gauß liefert

Korollar 14.2 2. Greensche Formel
Seien $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalbereich und $u, v, a_\alpha \in C^r(B) \cap C^{r-1}(\overline{B})$,
L wie in Lemma 14.1, $\quad Lu, L^*v \in L(B), \quad \boldsymbol{\nu}$ die äußere Normale von ∂B,
dann gilt

$$\int_B [vLu - uL^*v]\; d\boldsymbol{x} \;=\; \int_{\partial B} \boldsymbol{\nu}\cdot \boldsymbol{J}(u,v)\; ds. \tag{14.3}$$

Wir leiten aus diesem Resultat eine weitere Folgerung ab.
Wir wissen (vgl S.90) daß für lineare Differentialoperatoren 2. Ordnung mit einer symmetrische Matrix $A = (a_{jk})$ gilt:

$$\text{(14.4)} \qquad L \text{ selbstadjungiert} \quad \overset{\text{Aufgabe}}{\Longleftrightarrow} \quad Lu \;=\; \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + cu.$$

Für diese $L = L^*$ reduziert sich (14.2) zu

$$vLu - uL^*v \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\sum_{k=1}^{n}(va_{jk}u_{x_k} - ua_{jk}v_{x_k})\right\},$$

und die Integration über einen Normalbereich B liefert mit Gauß

$$\begin{aligned}\int\limits_B (vLu - uL^*v)\;d\boldsymbol{x} \;&=\; \int\limits_{\partial B} \sum_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}(va_{jk}u_{x_k} - ua_{jk}v_{x_k})\right\}\cdot \nu_j\;ds \\ &=\; \int\limits_{\partial B} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\nu_j}_{\substack{=:\,\sigma_k,\\ \text{also } \boldsymbol{\sigma} = A\boldsymbol{\nu}}} \left(v\frac{\partial u}{\partial x_k} - u\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) ds \\ &=\; \int\limits_{\partial B}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right) ds.\end{aligned}$$

Damit haben wir folgenden Spezialfall der 2. Greenschen Formel bewiesen.

Korollar 14.3
Seien L ein linearer, selbstadjungierter Differentialoperator 2. Ordnung in einem Normalbereich $B \subset \mathbb{R}^n$

$$Lu \;=\; \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + cu,$$

$A = (a_{jk})$ symmetrisch, $a_{jk} \in C^1(\overline{B})$, $u, v \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B})$, $Lu, L^*v \in L(B)$, $\boldsymbol{\nu}$ die äußere Normale auf ∂B, $\boldsymbol{\sigma} = A\boldsymbol{\nu}$ der *Konormalenvektor*, so gilt

$$\text{(14.5)} \qquad \int\limits_B (vLu - uL^*v)\;d\boldsymbol{x} \;=\; \int\limits_{\partial B}\left(v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)\; ds.$$

Bemerkungen:

1) Für $L = \Delta$, $A = I$, also $\nu = \sigma$ erhält man die Darstellung aus Satz 3.10.

2) Der Konormalenvektor ist bzgl. dem Rand eines Gebiets **und** eines Differentialoperators definiert.

Als Nebenergebnis erhalten wir

Korollar 14.4
Notwendige Lösungsbedingung für Neumann- Probleme der Potentialgleichung
Die Randwertaufgabe

$$\Delta u = 0 \text{ in } B \text{ (Normalgebiet)}, \quad u \in C^2(B) \cap C^1(\overline{B}), \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g(\boldsymbol{x}) \text{ auf } \partial B$$

ist nur lösbar, falls $\displaystyle\int_{\partial B} g(\boldsymbol{x})\, ds = 0\,.$

Beweis: Gleichung (14.5) für $v = 1\,,\ Lu = \Delta u\,$, also $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\nu}$, liefert $\displaystyle\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = 0\,.$ ■

Bemerkung: Das Korollar liefert nur eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit. Ohne zusätzliche Voraussetzungen ist obige Aufgabe nicht eindeutig lösbar.

§ 15 Distributionelle Lösungen

Definition 15.1
Es sei L ein linearer Differentialoperator

(15.1) $$Lu = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha \partial^\alpha u, \quad r \in \mathbb{N}, \quad a_\alpha \in C(B), \quad B \subset \mathbb{R}^n \text{ ein Gebiet.}$$

Ist $u \in C^r(B)$, $F \in C(B)$ und

(15.2) $$Lu(\boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x}), \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in B,$$

so heißt u starke Lösung von (15.2).

Bemerkung: Gelegentlich ist $F \in C(B)$ nicht ausreichend (vgl. dazu das Beispiel der inhomogenen Wellengleichung).
Ist F eine gegebene Distribution (das schließt die Möglichkeit ein, daß F eine stetige Funktion ist), so kann man (15.2) als Differentialgleichung für eine Distribution u auffassen gemäß

(15.3) $$\langle Lu, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{D}(B) \quad (\text{d.h. } \operatorname{Tr} \varphi \subset B).$$

Gemäß unseren Ableitungsregeln gilt, **falls** $a_\alpha \in C^\infty$ (vgl. (13.14))

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \langle u, L^* \varphi \rangle .$$

Deshalb definieren wir

Definition 15.2 Distributionelle Lösung
Für den Differentialoperator L gemäß (15.1) mit $a_\alpha \in C^\infty$ und eine Distribution $F \in \mathcal{D}'(B)$ erklären wir: Eine Distribution u heißt
verallgemeinerte (distributionelle) Lösung von $Lu = F$, falls

(15.4) $$\langle u(x), L^*[\varphi](x) \rangle = \langle F(x), \varphi(x) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(B) \quad (\text{d.h. } \operatorname{Tr} \varphi \subset B\,).$$

Bemerkung: Liegen keine C^∞-Koeffizienten vor, so kann man, angepaßt an hyperbolische, elliptische und parabolische Differentialgleichungen eine *schwache* Lösung in Sobolev-Räumen erklären. Wir werden das am Beispiel elliptischer Differentialgleichungen in §20 vorführen.

Der nächste Satz betrifft homogene Differentialgleichungen. Dies ist keine wesentliche Einschränkung. Liegt eine Aufgabe mit einer nichthomogenen Differentialgleichung $Lu = f$ vor, so kann man diese durch eine geeignete Transformation in ein vollhomogenes Problem überführen. Auch dies werden wir in §20 am Beispiel eines elliptischen Problems zeigen.

Satz 15.3
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $a_\alpha \in C^\infty$, dann gilt:

1) Ist $u \in C^r(B)$ eine verallgemeinerte Lösung von $Lu = 0$, L gemäß (15.1), so ist u auch starke Lösung von $Lu = 0$.

2) Eine starke Lösung von $Lu = 0$ ist auch eine verallgemeinerte Lösung.

Bedeutung:
Falls u differenzierbar ist, verschenkt der verallgemeinerte Lösungsbegriff nichts.

Beweis 1) Ist u verallgemeinerte Lösung, so gilt

$$\langle u(\boldsymbol{x}), L^*[\varphi](\boldsymbol{x})\rangle = 0 \quad \overset{u\in C^r}{\Longrightarrow} \quad \int_B u(\boldsymbol{x})L^*[\varphi](\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(B).$$

Zu jedem $\varphi \in \mathcal{D}(B)$ gibt es ein beschränktes Normalgebiet $\widehat{B} \subset B$ mit $\operatorname{Tr}\varphi \subset \widehat{B}$, denn $\operatorname{Tr}\varphi$ ist kompakt und B offen, also der Abstand $d(\operatorname{Tr}\varphi, \partial B) = \varepsilon > 0$. Man kann deshalb $\operatorname{Tr}\varphi$ und ∂B z.B. durch stückweise differenzierbare Hyperflächen (Polynome im $\mathbb{R}^2$) trennen. Dann ist

$$\int_{\widehat{B}} u(\boldsymbol{x})L^*[\varphi](\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x} \;=\; 0. \tag{15.5}$$

Daraus folgt mit Korollar 14.2, da φ samt seinen Ableitungen auf $\partial\widehat{B}$ verschwindet

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{B}} L[u](\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= 0 \qquad \text{und damit}\\ \int_{B} L[u](\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} &= 0 \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(B).\end{aligned}$$

Hieraus folgt $L[u](\boldsymbol{x}) = 0 \quad \forall\boldsymbol{x} \in B$, denn angenommen $L[u](\bar{\boldsymbol{x}}) \neq 0$, z.B. $L[u](\bar{\boldsymbol{x}}) > 0$, dann existiert eine Umgebung $U(\bar{\boldsymbol{x}})$ in der $L[u](\bar{\boldsymbol{x}}) > 0$ ausfällt.
Insbesondere gibt es dann eine Kugel $K(\bar{\boldsymbol{x}}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ |\boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}}| \leq \alpha\} \subset U(\bar{\boldsymbol{x}})$ und eine Testfunktion $\tilde{\varphi}$ mit $\operatorname{Tr}\tilde{\varphi} \subseteq K(\bar{\boldsymbol{x}})$ und $\tilde{\varphi} > 0$ in $\operatorname{Tr}\tilde{\varphi}$ (vgl. (13.1)). Dann folgt

$$\int_B L[u](\boldsymbol{x})\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x} > 0,$$

also ein Widerspruch.
Beweis 2) Aus $L[u](\boldsymbol{x}) = 0 \quad \forall\boldsymbol{x} \in B,\ u \in C^r(B)$, folgt

$$\begin{aligned}\langle Lu, \varphi\rangle &= 0 \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(B) \quad \text{und damit}\\ 0 = \langle Lu, \varphi\rangle &= \langle u, L^*\varphi\rangle\end{aligned}$$

laut Ableitungsregel. ∎

Es erhebt sich die

Frage: Für welche L (wenn es überhaupt welche gibt) existieren verallgemeinerte Lösungen von $Lu = 0$, die **nicht** stark sind?

Unsere früheren Überlegungen lassen den Wellenoperator als Kandidat geeignet erscheinen. **Beispiel**

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Starke Lösungen sind $u = w_1(x+t) + w_2(x-t)$ für beliebige $w_i \in C^2$. Man fragt sich, warum es nur zweimal stetig differenzierbare Wellen geben soll. Wie wär's denn mit $w_1 \equiv 0$ und

$$w_2(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \qquad \text{Heaviside-Funktion,}$$

bzw.

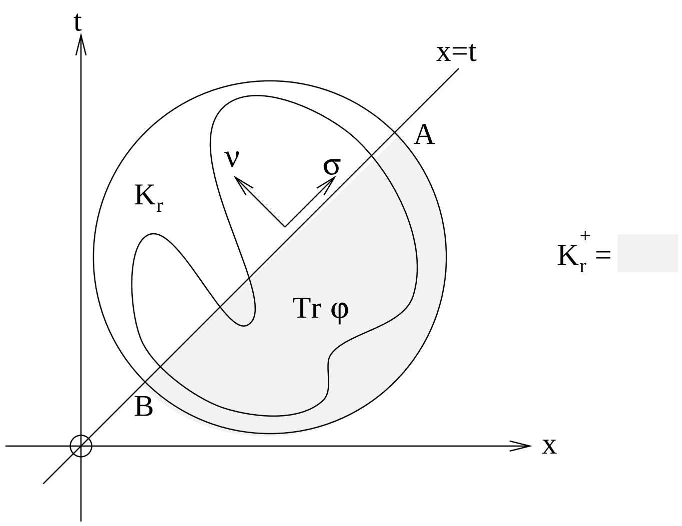
$$u(x,t) = w_2(x-t) = \begin{cases} 1, & x \geq t, \\ 0, & x < t. \end{cases}$$

Behauptung:
$u(x,t) = w_2(x-t)$ ist verallgemeinerte Lösung von $L[u] = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$

Beweis: Wegen $u = 0$ für $x < t$ und $L = L^*$ (Definition 13.7) muß gezeigt werden

$$\langle u, L^*[\varphi] \rangle = \iint\limits_{x>t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(B).$$

Dies muß insbesondere gezeigt werden für alle φ, deren Träger einen nichtleeren Durchschnitt mit der Geraden $x = t$ haben. Für alle anderen φ ist die Gleichung richtig, da im Komplement der Geraden $x = t$ die Funktion $w_2 \in C^2$ ist und damit starke Lösung.



Sei also $\operatorname{Tr}\varphi \subset K_r =$ offene Kugel mit Radius r und $\operatorname{Tr}\varphi \cap \{(x,t) \in \mathbb{R}^2; x = t\} \neq \emptyset$
Wir wenden nun die Greensche Formel (14.5) an auf die Funktionen

$$v \equiv 1, \quad u = \varphi, \quad \text{und das Gebiet} \quad K_r^+ = K_r \cap \{(x,t);\ x > t\},$$

denn für $x < t$ verschwindet u und damit auch $\langle u, L^*\varphi \rangle$.

Sei C das Geradenstück $\overline{AB} : C = K_r \cap \{(x,t);\ x = t\}$ und $\boldsymbol{\nu}$ die äußere Normale von $\widetilde{B}$ auf C. Dann erhalten wir wegen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

die Beziehungen

$$\iint\limits_{x>t} L[\varphi]\ dxdt \ = \ \iint\limits_{x>t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)\ dxdt \ = \ \int\limits_C \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\, ds \ = \ \varphi(A) - \varphi(B) \ = \ 0.$$

$\blacksquare$

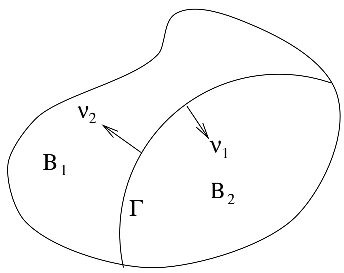
§ 16 Unstetigkeiten verallgemeinerter Lösungen

Wir wissen nun, daß es verallgemeinerte Lösungen gibt, welche Unstetigkeiten auf den Charakteristiken haben. Daraus folgen zwangsläufig die Fragen: Für welche Differentialoperatoren kommen Unstetigkeiten von Lösungen vor? Vielleicht nur für solche, die Charakteristiken besitzen? Könnte man dann die Charakteristiken als Träger von Unstetigkeiten der Lösungen charakterisieren? (vgl. § 11)

Wir untersuchen folgendes

Problem (P): (vgl. Zeichnung)
B_1, B_2 seien offene Normalgebiete, Γ eine glatte $(n-1)-$ dimensionale Hyperfläche und $B = B_1 \cup B_2 \cup \Gamma$. u sei in B eine verallgemeinerte Lösung von

$Lu = \sum\limits_{|\alpha|\le r} a_\alpha \partial^\alpha u = 0\,,\ a_\alpha \in C^\infty(B)$ und $u_i = \text{Restr}\, u|_{B_i} \in C^r(\bar{B}_i)\,,\ i = 1, 2.$



Frage: Sind Unstetigkeiten von $\partial^\alpha u\,,\ |\alpha| \le r,$ auf Γ möglich, falls ja welche, und was bedeuten sie für Γ ?

Um diese Frage in den Griff zu bekommen, führen wir die Lösungseigenschaften der u_i in den B_i mit der Greenschen Formel zurück auf das Verhalten der u_i auf ∂B_i .

(16.1) $\qquad L[u_i] = 0 \quad \text{in } B_i, \quad i = 1, 2 \quad \text{gilt im starken Sinn.}$

Wir können, da $0 = \int\limits_B uL^*\varphi\ d\boldsymbol{x} = \sum\limits_{i=1}^{2} \int\limits_{B_i} uL^*\varphi\ d\boldsymbol{x}$ (distributionelle Lösung) die 2. Greensche Formel (14.3) auf beide B_i 's anwenden und erhalten mit (16.1):

$$0 = \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{B_i} uL^*\varphi\ d\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{2} \Bigg[\int\limits_{B_i} \underbrace{L[u_i]}_{=0} \varphi\ dx - \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\nu}^i \cdot \boldsymbol{J}(u_i, \varphi)\ ds \Bigg],$$

und da auf Γ die Normalen von ∂B_1 und ∂B_2 entgegengesetztes Vorzeichen haben mit $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^1$ oder $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^2$

$$(16.2)\quad 0 = \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{J}(u_1, \varphi) - \boldsymbol{J}(u_2, \varphi))\ ds = \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{J}(\underbrace{u_1 - u_2}_{w}, \varphi)\ ds \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(B).$$

Setzt man $w = u_1 - u_2$, so können wir unsere Frage aus Problem (P) wie folgt modifizieren:

Frage: Sind unter der Voraussetzung

$$\int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{J}(w, \varphi)\, ds \;=\; 0, \quad w \;=\; u_1 - u_2, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(B) \tag{16.3}$$

Unstetigkeiten von $\partial^\alpha w$, $|\alpha| \le r$, möglich und was bedeuten sie ggf. für Γ ?

Im Rahmen dieser Vorlesung kann diese Frage nur beispielhaft, d.h. für einige Typen von Differentialoperatoren und spezielle Unstetigkeiten untersucht werden.

Differentialoperatoren 1. Ordnung

$$Lu \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_i u \quad \Rightarrow \quad L^* u \;=\; \sum_{i=1}^{n} -\partial_i (a_i u)$$

Wir berechnen das Integral (16.3).
Aus (14.2) liest man ab

$$vLu - uL^*v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{(a_j uv)}_{J_j(u,v)},$$

mit $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ folgt aus (16.3)

$$0 = \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{J}(w, \varphi)\, ds = \int\limits_{\Gamma} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j \nu_j \right) w\varphi\, ds \;=\; \int\limits_{\Gamma} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu}\; w\varphi\, ds \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(B),$$

und hieraus, weil $w = u_1 - u_2$, $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{\nu}$ stetig sind (Γ glatt),

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu}\; w \;=\; 0 \quad \text{auf } \Gamma. \tag{16.4}$$

Ist $w \neq 0$ in $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Gamma$, so folgt aus der Stetigkeit von w , daß $w \neq 0$ ist in einer Relativumgebung $\Gamma_1(\bar{\boldsymbol{x}}) \subset \Gamma$. Dann erhalten wir mit (16.3)

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} \;=\; 0 \quad \text{auf } \Gamma_1(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{16.5}$$

Γ ist eine glatte $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (Hyperfläche), die in einer Umgebung von $\bar{\boldsymbol{x}}$ durch $f(\boldsymbol{x}) = 0$ (f glatt), dargestellt werden kann. Deshalb ist $(\pm)\boldsymbol{\nu} = \operatorname{grad} f$, und (16.5) schreibt sich als

$$\sum_{j=1}^{n} a_j f_{x_j} \;=\; 0 \quad \text{in einer Relativumgebung von } \bar{\boldsymbol{x}} \text{ auf } \Gamma.$$

Nach (10.2) und Satz 9.3 Teil 3) bedeutet das, daß Γ in einer Umgebung von $\bar{\boldsymbol{x}}$ charakteristische Mannigfaltigkeit ist. Die Frage in (16.3) wird also beantwortet (zumindest teilweise) wie folgt:

(16.6)

Ist für einen linearen Differentialoperator L $$w(\bar{\boldsymbol{x}}) = u_1(\bar{\boldsymbol{x}}) - u_2(\bar{\boldsymbol{x}}) \neq 0 \;\text{ für ein }\; \bar{\boldsymbol{x}} \in \Gamma,$$ so ist Γ in einer Umgebung von $\bar{\boldsymbol{x}}$ charakteristisch für L.

Bzgl. der Unstetigkeiten der 1. Ableitung kennen wir das Ergebnis aus Satz 11.8. Angewandt auf unsere Situation lautet es

(16.7)

Es ist $u \notin C^1(B)$ genau dann, wenn Γ in den Unstetigkeiten der 1. Ableitung von u charakteristisch für L ist.

Fazit: Unstetigkeiten gibt es nur auf charakteristischen Mannigfaltigkeiten.

Beispiel: Die Transportgleichung (vgl. (11.9))

$$Lu \;=\; u_t + \boldsymbol{v}\cdot(\operatorname{grad} u) \;=\; 0.$$

Gezeigt wurde (vgl. §11), daß

$$u(\boldsymbol{x},t) \;=\; w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t) \;=\; \begin{cases} 1-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t|, & |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t| \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine stetige, stückweise stetig differenzierbare Lösung war. Die Kreise $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t| = 1$ waren Charakteristiken.

Wie im Beispiel in §15 kann man zeigen, daß für $\tilde{w}(\boldsymbol{s}) = \begin{cases} 1, & |\boldsymbol{s}| \le 1, \quad \boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$u(\boldsymbol{x},t) \;=\; \tilde{w}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t) \;=\; \begin{cases} 1, & |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t| \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine verallgemeinerte Lösung ist mit den Unstetigkeitsstellen $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}t| = 1$. Diese müssen gemäß (16.6) Charakteristiken sein.

Selbstadjungierte Differentialoperatoren 2. Ordnung

Grundlage unserer Untersuchungen ist wieder Problem (P).
Für alle $\varphi \in \mathcal{D}(B)$ gilt $\langle Lu, \varphi\rangle = \langle u, L^*\varphi\rangle = 0$, und mit $L = L^*$ (vgl. Definition 13.7 und Gleichung (14.4)) folgt

$$\langle u, L^*\varphi\rangle = \langle u, L\varphi\rangle \quad = \quad \int\limits_B uL\varphi \, d\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{B_i} u_i L\varphi \, d\boldsymbol{x} \qquad \text{und mit (14.5), (Green)}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int\limits_{B_i} \varphi \underbrace{Lu_i}_{\substack{=0 \\ \text{Satz 15.3}}} \, d\boldsymbol{x} \; + \; \int\limits_\Gamma \left(u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} - \varphi \frac{\partial u_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} \right) ds + \int\limits_\Gamma \left(u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} - \varphi \frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2} \right) ds \; = \; 0.$$

Da $\boldsymbol{\sigma} = A\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\nu}^1 = -\boldsymbol{\nu}^2$ auf Γ, wobei $\boldsymbol{\nu}$ die äußere Normale ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 \; &= \; \int\limits_\Gamma \Big[\underbrace{(u_1 - u_2)}_{=: w} \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} - \varphi \underbrace{\left(\frac{\partial u_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} - \frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} \right)}_{\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1}} \Big] \, ds \\ &= \; \int\limits_\Gamma \left(w \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} - \varphi \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} \right) ds. \end{aligned} \tag{16.8}$$

Frage: Wann können w und (oder) $\dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1}$ ungleich Null sein auf Γ, und was bedeutet dies für Γ? Wir zeigen:

Für Problem (P) gilt:

(16.9) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}^1(\bar{\boldsymbol{x}}) \text{ ist Tangentialvektor} \\ \text{von } \Gamma \text{ in } \bar{\boldsymbol{x}}. \end{array}\right\} \iff \Gamma$ ist charakteristisch für L in $\bar{\boldsymbol{x}}$.

Detaillierter gilt:

(16.10) $\boldsymbol{\sigma}^1(\bar{\boldsymbol{x}})$ transversal für Γ in $\bar{\boldsymbol{x}}$. (nicht tangential) $\implies$ $u \in C^2(U(\bar{\boldsymbol{x}}))$. ($U(\bar{\boldsymbol{x}}) \widehat{=}$ Umgebung von $\bar{\boldsymbol{x}}$)

(16.11) $\boldsymbol{\sigma}^1(\bar{\boldsymbol{x}})$ tangential in $\Gamma(\bar{\boldsymbol{x}}) \subset \Gamma$. $\implies$ $\dfrac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} = 0$ in $\Gamma(\bar{\boldsymbol{x}})$, aber nicht notwendig $u_1 = u_2$, d.h. Unstetigkeiten von u und $\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}$, $\quad (\boldsymbol{\nu} \neq \boldsymbol{\sigma}^1)$ können vorkommen.

Beachte: Die Verneinung von Γ *ist charakteristisch für ...* bedeutet nicht: *Lu ist elliptisch in $\bar{\boldsymbol{x}}$*, denn letzteres ist eine Aussage über alle Mannigfaltigkeiten, die durch $\bar{\boldsymbol{x}}$ gehen.

Beweis (16.9)

(16.12) zu $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Gamma \;\; \exists \;\; \Gamma_1(\bar{\boldsymbol{x}}) \subseteq \Gamma \;\;\wedge\;\; f \in C^\infty : \; f(\boldsymbol{x}) = 0, \;\; \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \neq 0 \;\; \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_1(\bar{\boldsymbol{x}})$.

Dann gelten folgende Äquivalenzen:
(16.13)

$$\boldsymbol{\sigma}^1 \text{ ist Tangentenvektor von } \Gamma \text{ in } \bar{\boldsymbol{x}}, \quad \operatorname{grad} f(\bar{\boldsymbol{x}}) \perp \boldsymbol{t} \;\; \forall \text{ Tangentialvektoren } \boldsymbol{t}.$$

$$\iff \boldsymbol{\sigma}^1(\bar{\boldsymbol{x}}) \cdot \operatorname{grad} f(\bar{\boldsymbol{x}}) \;=\; 0 \;=\; \pm {\boldsymbol{\nu}^{\mathbf{1}}}^{\boldsymbol{T}} A(\bar{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{\nu}^1 \;\; (\iff A(\bar{\boldsymbol{x}}) \text{ nicht definit})$$

$$\overset{(11.4)}{\iff} \Gamma \text{ charakteristisch für } L \text{ in } \bar{\boldsymbol{x}}.$$

Beweis (16.10)
Wir zeigen zuerst indirekt: u ist stetig in $U(\bar{\boldsymbol{x}})$, d.h. $w = u_1 - u_2 = 0$ in $U(\bar{\boldsymbol{x}}) \cap \Gamma$.

Aus der Annahme $w(\bar{\boldsymbol{x}}) \neq 0$, Œ > 0 folgt

$$w(\boldsymbol{x}) > 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma_2(\bar{\boldsymbol{x}}) \subset \Gamma \quad \text{und vgl. (16.12)}$$
$$f(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \neq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_2(\bar{\boldsymbol{x}}) \overset{\text{Œ}}{\subseteq} \Gamma_1(\bar{\boldsymbol{x}}),$$

Nun ist $\boldsymbol{\sigma}^1$ transversal in $\bar{\boldsymbol{x}}$. Dies liefert mit (16.13)

$$\boldsymbol{\sigma}^1(\boldsymbol{x}) \cdot \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \neq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Gamma_3(\bar{\boldsymbol{x}}) \qquad (\text{Œ } \Gamma_3(\bar{\boldsymbol{x}}) \subseteq \Gamma_2(\bar{\boldsymbol{x}})).$$

Nun existiert ein $a \in \mathcal{D}(B)$ mit der Eigenschaft:

$\operatorname{Tr} a = \{\boldsymbol{x}; |\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}| \leq \alpha\}$ sodaß $\operatorname{Tr} a \cap \Gamma \supseteq \Gamma_4(\bar{\boldsymbol{x}}) (\subseteq \Gamma_3)$ und $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \operatorname{grad} f)$.

Deshalb ist $\varphi := a \cdot f \in \mathcal{D}(B)$ und $\varphi = 0$ auf Γ_4. Einsetzen in (16.8) liefert

$$\int_{\Gamma \cap \operatorname{Tr} a} w \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} \, ds \;=\; 0. \tag{16.14}$$

Nun ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Richtungs-} \\ \text{ableitung}}}{=} \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \operatorname{grad} \varphi \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Produkt-} \\ \text{regel}}}{=} \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \Big(a \operatorname{grad} f + \underbrace{f \operatorname{grad} a}_{= 0 \text{ auf } \Gamma_1(\bar{x})} \Big) = \underbrace{a \; (\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \operatorname{grad} f)}_{> 0}.$$

Dies liefert in (16.14) einen Widerspruch zur Annahme, also $w = 0$ auf $\Gamma_4(\bar{\boldsymbol{x}})$.

Behauptung: $\dfrac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} = 0$ auf $\Gamma_4(\bar{\boldsymbol{x}})$.

Einsetzen von $w = 0$ auf $\Gamma_4(\bar{\boldsymbol{x}})$ in (16.8) liefert:

$$\int_{\Gamma \cap \operatorname{Tr} a} \varphi \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} \, ds \;=\; 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(B) \quad \text{mit} \quad \operatorname{Tr} \varphi \cap \Gamma \subset \operatorname{Tr} a \cap \Gamma.$$

Da $\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1}$ stetig ist, folgt hieraus sofort $\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} = 0$ auf $\Gamma_4(\bar{\boldsymbol{x}}) \subset \Gamma \cap \operatorname{Tr} a$.

Da $w = 0$ auf $\Gamma_4(\bar{\boldsymbol{x}})$, gilt für alle Tangentialableitungen (mit $\boldsymbol{t}$ bezeichnen wir die Tangentenvektoren)

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{t}} = 0 \quad \forall \boldsymbol{t} \text{ an } \Gamma_4(\bar{\boldsymbol{x}}).$$

Zusammen mit

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_4(\bar{\boldsymbol{x}}) \quad \text{(äußere Ableitung)}$$

folgt hieraus:

$\operatorname{grad} w = 0$ auf $\Gamma_4(\bar{\boldsymbol{x}})$, also $u \in C^1(B_1 \cup B_2 \cup \Gamma_4(\bar{\boldsymbol{x}}))$.

Im nicht charakteristischen Fall sind die Ableitungen 2. Ordnung in $\Gamma_4(\bar{\boldsymbol{x}})$ durch die Differentialgleichung eindeutig festgelegt. Deshalb ist
$u \in C^2(B_1 \cup B_2 \cup \Gamma_4(\bar{\boldsymbol{x}}))$.

Beweis (16.11) Wir schreiben (16.8) um mit Hilfe der Produktregel

$$0 = \int\limits_\Gamma \left(w \frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} - \varphi \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} w \right) ds = \int\limits_\Gamma \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} (w\varphi) - 2\varphi \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} w \right) ds. \tag{16.15}$$

Durch Anwenden des Gaußschen Integralsatzes auf der Mannigfaltigkeit Γ kann man zeigen

$$\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} (w\varphi)\, ds = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(B).$$

Beweisidee: Die Ableitung $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1}(w\varphi)$ ist tangential, d.h. berechenbar, wenn die Funktion $v := w\varphi$ auf Γ gegeben ist und von 1. Ordnung. Der Gaußsche Integralsatz auf Mannigfaltigkeiten (hier auf Γ) verwandelt ein Integral über ein beschränktes Gebiet $G \subset \Gamma$ mit glattem Rand über eine Funktion, die nur 1. Ableitungen von v enthält (Divergenzausdruck), in ein Integral über ∂G. Wir wählen ein Gebiet, welches $\Gamma \cap \operatorname{Tr}(w\varphi)$ enthält. Auf ∂G verschwindet $w\varphi$ samt allen Ableitungen, das Randintegral ist also $= 0$.

Aus (16.15) folgt dann

$$\int\limits_\Gamma \varphi \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} w\, ds = 0,$$

woraus wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} w$ und weil φ beliebig war, sofort $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} w = 0$ folgt. Über w läßt sich nichts aussagen. ■

Bemerkung
Für konstante Koeffizienten gilt im zweidimensionalen Fall $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}^1} = k \frac{\partial}{\partial s}$ mit einer Konstanten k und s als Bogenlänge auf Γ. Dann folgt aus $\frac{\partial}{\partial s} w = 0$ auf Γ, daß $w = \text{const}$ auf Γ.

§ 17 Direktes Produkt und Faltung

Definition 17.1

a) $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *verschwindet* auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\Leftrightarrow \text{def} \quad F(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(Bezeichnung: $F = 0$ auf Ω)

b) Seien $F_i \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad i = 1, 2.$

$$F_1 = F_2 \text{ in } \Omega \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad F_1 - F_2 \text{ verschwindet in } \Omega$$

c) Für $F \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ist der *Träger von* F $(\operatorname{Tr} F, \operatorname{supp} F)$ die kleinste abgeschlossene Menge, außerhalb der F verschwindet.

d) $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt *finit* $\quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \operatorname{Tr} F$ kompakt.

Bemerkungen

1) Die Definition von *Träger* ist für Funktionen und Distributionen wörtlich identisch, nur die Bedeutung von $F = 0$ ist eine andere.

2) Definition 17.1 ist eine „Negativdefinition". Man definiert, was nicht dazu gehört, d.h.

$$x \notin \operatorname{Tr} F \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ (offene) Umgebung } U(x) \text{ von } x : F = 0 \text{ in } U(x),$$

z.B. $U(x) = \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Tr} F$; d.h. falls $\operatorname{Tr} \varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Tr} F$, so ist $F(\varphi) = 0$. Wir haben also auch

$$F(\varphi) = 0 \ \forall \varphi \text{ mit } \operatorname{Tr} \varphi \cap \operatorname{Tr} F = \emptyset.$$

Beispiele

1) $F = \delta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr} F = \{0\} \quad$ Übung!

2) $f \in C(\mathbb{R}^n), \quad F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ erzeugt von $f \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr} f = \operatorname{Tr} F \quad$ Übung!

3) $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in L(A), \quad f(x) > 0 \quad \forall x \in A, \quad f = 0$ sonst,
$\langle F(x), \varphi(x) \rangle = \int\limits_A f(x)\varphi(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr} F = \bar{A} \quad$ Übung!

Wir benötigen im Folgenden mehrfach die Vertauschbarkeit von Integrationsreihenfolgen und zitieren deshalb zunächst den

Satz von Fubini: Sei $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ meßbar in $\Omega_1 \times \Omega_2$, $\Omega_j \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1,2$, so gilt

$$(-\infty \leq) \int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} |f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\, d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} = \int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2} |f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\, d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega_2}\int\limits_{\Omega_1} |f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|\, d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} \;\; (\leq \infty).$$

Hat eines dieser Integrale einen endlichen Wert, so gilt

$$(-\infty <) \int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} = \int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\Omega_2}\int\limits_{\Omega_1} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} \;\; (< \infty).$$

Direktes Produkt von Distributionen

Motivation durch das direkte Produkt lokal integrierbarer Funktionen $f, g \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R})$:

Für $h(x_1,x_2) = f(x_1)g(x_2)$ ist $h \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, und es gilt für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned}
\langle h(x_1,x_2), \varphi(x_1,x_2)\rangle &= \langle f(x_1)g(x_2), \varphi(x_1,x_2)\rangle \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1)g(x_2)\varphi(x_1,x_2)\; dx_1 dx_2 \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} g(x_2) \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1)\varphi(x_1,x_2)\; dx_1}_{\substack{=:\psi_2(x_2) \\ \psi_2\in\mathcal{D}(\mathbb{R})}}\; dx_2 \\
&= \langle g(x_2), \langle f(x_1), \varphi(x_1,x_2)\rangle\rangle \\
&\overset{\substack{\text{Fubini} \\ \downarrow}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x_1) \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}} g(x_2)\varphi(x_1,x_2)\; dx_2}_{\substack{=:\psi_1(x_1) \\ \psi_1\in\mathcal{D}(\mathbb{R})}}\, dx_1 \\
&= \langle f(x_1), \langle g(x_2), \varphi(x_1,x_2)\rangle\rangle\,.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten analog für $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^m)$ und motivieren so

Definition 17.2
Seien $F_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $F_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$.
Dann wird das *direkte Produkt* (*Tensorprodukt*) $F := F_1 \otimes F_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ erklärt durch

$$\langle F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle = \langle F_1(\boldsymbol{x}) \otimes F_2(\boldsymbol{y}), \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle = \langle F_1(\boldsymbol{x}), \langle F_2(\boldsymbol{y}), \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle\rangle .$$

Daß diese Definition vernünftig ist, wird belegt durch

Satz 17.3
Unter den Voraussetzungen von Definition 17.2 gilt

a) $\psi(\boldsymbol{y}) := \langle F_1(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle \implies$
$$\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m) \quad \text{und} \quad \partial_y \psi(\boldsymbol{y}) = \langle F_1(\boldsymbol{x}), \partial_y \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\rangle ,$$

b) $F = F_1 \otimes F_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$, (Existenzaussage)

c) $F_1 \otimes F_2 = F_2 \otimes F_1$,

d) $\mathrm{Tr}(F_1 \otimes F_2) = \mathrm{Tr}\, F_1 \otimes \mathrm{Tr}\, F_2 := \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{n+m};\ \boldsymbol{x} \in \mathrm{Tr}\, F_1,\ \boldsymbol{y} \in \mathrm{Tr}\, F_2\}$.

Beweis:
a), b), d) als Übung, (Triebel S. 136), c) vgl. Walter: Einführung in die Theorie der Distributionen. ■

Bemerkung: Ist $F_1 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und $F_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, so besagt c), daß die Reihenfolge der Anwendung der Distribution und der Integration vertauscht werden darf.

Beispiel zu Satz 17.3 c): $\delta(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ nachrechnen!

Faltung von Funktionen und Distributionen

Für Funktionen f_1, f_2 wird die *Faltung* $f_1 * f_2$ (*Faltungsprodukt*, englisch: *convolution*, *convolution product*) definiert durch

$$h(\boldsymbol{x}) = (f_1 * f_2)(\boldsymbol{x}) \quad := \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) f_2(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

$$\overset{\mathbf{u}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_2(\boldsymbol{x}-\mathbf{u}) f_1(\mathbf{u})\, d\mathbf{u} = (f_2 * f_1)(\boldsymbol{x}),$$

d.h. wenn das Faltungsprodukt existiert, ist es kommutativ.
Sind z.B. $f_1, f_2 \in L(\mathbb{R}^n)$, so existieren die Integrale fast überall, und es ist $h \in L(\mathbb{R}^n)$,

denn

$$\begin{aligned}\|h\|_{L_1} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |h(\boldsymbol{x})|\ d\boldsymbol{x} \le \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\,|f_2(\boldsymbol{y})|\ d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x} \\ &\overset{\substack{\text{Fubini}\\ \downarrow}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\,|f_2(\boldsymbol{y})|\ d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_2(\boldsymbol{y})| \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})|\ d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y} = \|f_2\|_{L_1}\|f_1\|_{L_1}.\end{aligned}$$

Bemerkungen

1) $f_1, f_2 \in\ L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ genügt nicht für die Existenz des Integrals $f_1 * f_2$.
Gegenbeispiel: $f_1 = f_2 = 1$.

2) Existiert $f_1 * f_2$ und sind $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, so liest man ab

$$\begin{aligned}\partial_{x_i} h(\boldsymbol{x}) = \partial_{x_i}(f_1 * f_2) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i} f_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))f_2(\boldsymbol{y})\ d\boldsymbol{y} = (\partial_{x_i} f_1) * f_2 \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\partial_{x_i} f_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}))f_1(\boldsymbol{y})\ d\boldsymbol{y} = f_1 * \partial_{x_i} f_2.\end{aligned}$$

Setzt man voraus, daß $f_i \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ und f_1 oder f_2 finit ist, so läßt sich h als Distribution interpretieren ($\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$), und zwar

(i) falls f_1 finit ist durch

$$\begin{aligned}\langle h, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x}) \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f_2(\boldsymbol{y})\ d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x} &\overset{\substack{\text{Fubini}\\ \downarrow}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_2(\boldsymbol{y}) \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{y}}_{\substack{\text{existiert, da kompakter}\\ \text{Integrationsbereich}}} \\ &\overset{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_2(\boldsymbol{y}) \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(\boldsymbol{z})\varphi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})\ d\boldsymbol{z}}_{\substack{=:\psi(\boldsymbol{y}),\\ \psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\text{ da } f_1 \text{ finit}}}\, d\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

(ii) falls f_2 finit ist analog durch

$$\langle h, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x}) \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})f_1(\boldsymbol{y})\ d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x} \overset{\substack{\text{Fubini}\\ \downarrow}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(\boldsymbol{y}) \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_2(\boldsymbol{z})\varphi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})\ d\boldsymbol{z}}_{=:\chi(\boldsymbol{y}),\ \chi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}\, d\boldsymbol{y},$$

denn die Finitheit von f_1 bzw. f_2 bewirkt, daß ψ bzw. χ kompakten Träger hat, also Testfunktion ist.

Diese Ergebnisse legen nahe, die Faltung von Distributionen $h = f_1 * f_2,\ f_i \in \mathcal{D}'$ als direktes Produkt zu erklären, gemäß

$$\langle f_1 * f_2, \varphi\rangle = \langle f_1(\boldsymbol{x}) \otimes f_2(\boldsymbol{y}), \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle \,. \tag{17.1}$$

Schwierigkeit: Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist $\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, hat aber keinen beschränkten Träger.

Nun sind – ohne die Finitheitsforderung – die obigen Integrale immer noch erklärt, falls der Integrationsbereich beschränkt ist. Dies führt zur Forderung der sogenannten

Streifenbedingung

$M_\varphi = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2n};\ \boldsymbol{x} \in \operatorname{Tr} f_1,\ \boldsymbol{y} \in \operatorname{Tr} f_2,\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \operatorname{Tr}\varphi\}$ sei beschränkt $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel zur Streifenbedingung:
$f_1, f_2 \in L_{loc}(\mathbb{R}),\ \operatorname{Tr} f_1 = \{x;\ x \geq 0\},\ \operatorname{Tr} f_2 = \{y;\ y \geq 0\},\ \operatorname{Tr}\varphi = \{x;\ |x| \leq k\}$,
also $|x+y| \leq k$ (daher der Name *Streifen*bedingung) $\Longrightarrow$
$M_\varphi = \{(x,y);\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq k - x\}$.

Ist die Streifenbedingung erfüllt, so kann man in die obigen Integrale „straf-frei“ eine (von φ abhängige) Funktion $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ einführen mit $\eta \equiv 1$ in einer Umgebung von M_φ und (17.1) abändern zu

$$\langle f_1 * f_2, \varphi\rangle = \langle f_1(\boldsymbol{x}) \otimes f_2(\boldsymbol{y}), \eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{17.2}$$

$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ ist dann eine Testfunktion in $\mathbb{R}^{2n}$.

Konstruktion von η (über Mittelfunktionen, vgl. Übungen)

Zeige

1) $\varphi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-\boldsymbol{x}^2}}, & |\boldsymbol{x}| < 1, \quad \boldsymbol{x}^2 = \sum x_i^2, \\ 0, & |\boldsymbol{x}| \geq 1, \end{cases}$ ist eine Testfunktion in $\mathbb{R}^n$,

2) $\rho_\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{\varepsilon^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}} \cdot \varphi\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$ ist eine Testfunktion in $\mathbb{R}^n$

mit $\operatorname{Tr}\rho_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n;\ |\boldsymbol{x}| \leq \varepsilon\}$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 1$ und $\rho_\varepsilon \geq 0$.

3) Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt,

$A_\varepsilon := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ \exists \boldsymbol{a} \in A:\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| \leq \varepsilon\}$ eine ε-Umgebung von A und

$$\chi_{A_\varepsilon} = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \in A_\varepsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{ihre charakteristische Funktion,}$$

dann ist

$$(\chi_{A_\varepsilon})_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{x}) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})\rho_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi} \quad \text{aus} \quad \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad \text{und}$$

$$\eta(\boldsymbol{x}) := (\chi_{A_\varepsilon})_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{x}) = 1 \quad \text{in } A_{\varepsilon/2} \quad \text{(MWS der Int.-Rechnung).}$$

Nun können wir definieren

Definition 17.4 Distributionelle Faltung
$f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ genügen der

Streifenbedingung

$$M_\varphi := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2n};\ \boldsymbol{x} \in \operatorname{Tr} f_1,\ \boldsymbol{y} \in \operatorname{Tr} f_2,\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \operatorname{Tr} \varphi\} \quad \text{ist beschränkt} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{17.3}$$

Dann wird die *Faltung* $f_1 * f_2$ als Distribution erklärt durch
(17.4)
$$\langle f_1 * f_2, \varphi\rangle := \langle f_1 \otimes f_2, \eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle = \langle f_1, \langle f_2, \eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

wobei $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ mit $\eta \equiv 1$ in einer Umgebung von M_φ.

Bemerkung:
Wählt man in der Konstruktion von η : $A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{2n};\ |\boldsymbol{x}| \leq 1\}$ und setzt

$$\eta_k(\boldsymbol{x}) = \eta(\frac{\boldsymbol{x}}{k}),$$

so ist $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ und $\eta \equiv 1$ in $|\boldsymbol{x}| \leq k$.

Dann existiert bei erfüllter Streifenbedingung ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodaß

$$\eta_k = 1 \quad \text{in einer Umgebung von } M_\varphi \quad \text{und} \quad M_\varphi \cap \operatorname{Tr} \eta_k = M_\varphi, \quad \forall k \geq k_0,$$

weshalb man statt (17.4) auch definieren kann (vgl. Triebel):

$$\langle f_1 * f_2, \varphi\rangle := \lim_{k\to\infty} \langle f_1, \langle f_2, \eta_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{17.5}$$

Bemerkung: gemeint ist mit der Schreibweise nur: *für hinreichend großes k*, denn $\lim_{k\to\infty} \eta_k$ hat keinen kompakten Träger mehr.
Damit ist man unabhängig von der speziellen Menge M_φ, falls man auch unahängig ist von einem speziellen $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Satz 17.5 Faltungssatz für Distributionen
Unter den Voraussetzungen der Streifenbedingung (Definition 17.4) gilt

a) $f_1 * f_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

b) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$,

c) $\operatorname{Tr}(f_1 * f_2) \subset \operatorname{Tr} f_1 + \operatorname{Tr} f_2 := \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n;\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} \in \operatorname{Tr} f_1,\ \boldsymbol{y} \in \operatorname{Tr} f_2\}$,

d) $\partial^\alpha(f_1 * f_2) = \partial^\alpha f_1 * f_2 = f_1 * \partial^\alpha f_2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Wir beweisen a). Dann folgt b) aus der Kommutativität des direkten Produkts. Für c) verweisen wir auf Walter, Kapitel 8 (Einführung in die Theorie der Distributionen).

Beweis a)

1) Es ist $f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ nach Satz 17.3 (Definition als direktes Produkt):
$\langle f_1(\boldsymbol{x}) \otimes f_2(\boldsymbol{y}), \eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle$ ist erklärt wegen $\eta \cdot \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$.
Die Linearität in φ ist offensichtlich, man muß nur die Menge, in der $\eta \equiv 1$ ist, genügend groß wählen (vgl. dazu (17.5)).

2) Es muß gezeigt werden, daß die Faltung eindeutig definiert ist, d.h. nicht vom speziellen η abhängig ist. Dies ist für reguläre Distributionen, also Funktionen, klar, denn das η ändert ja nichts am Integrationsbereich. Für Distributionen muß es jedoch gezeigt werden. Sei also nach Definition 17.4

$$M_\varphi := \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2n};\ \boldsymbol{x} \in \operatorname{Tr} f_1,\ \boldsymbol{y} \in \operatorname{Tr} f_2,\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in \operatorname{Tr}\varphi\} \quad \text{beschränkt}$$

und $\eta, \mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ mit

$$\begin{aligned} \eta &= 1 \quad \text{in einer Umgebung} \quad U \supset M_\varphi, \\ \mu &= 1 \quad \text{in einer Umgebung} \quad V \supset M_\varphi. \end{aligned}$$

Gezeigt werden muß

$$\langle f_1 \otimes f_2, (\eta - \mu)\varphi\rangle = 0 \quad \text{bzw.} \quad \langle f_1 \otimes f_2, \eta\varphi\rangle = \langle f_1 \otimes f_2, \mu\varphi\rangle\,.$$

Es gilt für $\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$

$$\eta - \mu = 0 \text{ in } M_\varphi, \quad (\eta-\mu)\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}), \quad \text{also} \quad \operatorname{Tr}(\eta-\mu)\tilde{\varphi} \subset \complement M_\varphi.$$

Da $\operatorname{Tr}\tilde{\varphi} \cap (\operatorname{Tr} f_1 \otimes f_2) = M_\varphi$ (vgl. die Streifenbedingung (17.3)), folgt

$$\emptyset = \operatorname{Tr}(\eta-\mu)\tilde{\varphi} \cap \operatorname{Tr}\tilde{\varphi} \cap (\operatorname{Tr} f_1 \otimes \operatorname{Tr} f_2) = \operatorname{Tr}(\eta-\mu)\tilde{\varphi} \cap (\operatorname{Tr} f_1 \otimes \operatorname{Tr} f_2)$$

und somit (vgl. Bemerkung 2 nach Definition 17.1)

$$\langle f_1 \otimes f_2, (\eta - \mu)\varphi\rangle = 0 \quad \text{bzw.} \quad \langle f_1 \otimes f_2, \eta\varphi\rangle = \langle f_1 \otimes f_2, \mu\varphi\rangle\,,$$

also die Unabhängigkeit vom speziellen η.

3) Nachweis der Stetigkeit von $f_1 * f_2$ (vgl. Satz 13.3).
Sei $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine Schwarz'sche Nullfolge, also
$\operatorname{Tr}\varphi_j \subset K_r = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ |\boldsymbol{x}| \le r\}$, $\sup|\partial^\alpha\varphi_j| \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\forall$ feste $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
Bestimme ein $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$, so daß $\eta = 1$ in einer beschränkten Menge U mit

$$U \supset (\operatorname{Tr} f_1 \otimes \operatorname{Tr} f_2) \cap \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2n};\ |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \le r\}, \quad \text{(vgl. (17.3))}$$

Dann muß gezeigt werden, daß auch $\psi_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ eine Schwarz'sche Nullfolge ist.
Mit der Leibniz-Regel für Funktionen mehrer Veränderlicher $f, g \in C^k$

$$\partial^\alpha(f \cdot g) = \sum_{\beta\le\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g \quad \text{für} \quad |\alpha| \le k \quad \text{mit}$$

$$\alpha \geq \beta \Longleftrightarrow \alpha_i \geq \beta_i, i = 1, \ldots, n, \quad \alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i!$$

folgt hieraus

$$\psi_j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\varphi_j(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \quad \text{erfüllt} \quad \sup |\partial^\alpha \psi_j| \xrightarrow{j \to \infty} 0 \quad \forall \text{ festen } \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

und man erhält die Stetigkeit, gemäß (17.4) aus Satz 13.3.

Beweis d): vgl. den etwas allgemeineren Beweis zu (17.7) des nächsten Satzes. ■

Satz 17.6 Faltungseigenschaften
Seien $F, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, und S finit.
a) Dann existiert $F * S = S * F$, insbesondere gilt

(17.6) $$F * \delta = \delta * F = F.$$

b) Ist L ein linearer DO mit *konstanten Koeffizienten*, so gilt (bei erfüllter Streifenbedingung auch ohne die Finitheit von S)

(17.7) $$L(F * S) = LF * S \quad = \quad F * LS, \quad \text{insbesondere gilt}$$

(17.8) $$L(\delta) * F \quad = \quad \delta * L(F) = L(F) \quad \forall F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

Beweis a) Gemäß Satz 17.5 ist $F * S = S * F$ erklärt, wenn die Streifenbedingung (17.3) erfüllt ist.

Für $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Tr} F$, $\boldsymbol{y} \in \operatorname{Tr} S$ sei $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq N$ (da $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $|\boldsymbol{x}| \leq N$ für $\boldsymbol{x} \in \operatorname{Tr} \varphi$)
und $|\boldsymbol{y}| \leq M$ (S finit)

Wegen $|\boldsymbol{x}| \leq |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| + |\boldsymbol{y}| \leq N + M$ und $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in M_\varphi$ folgt

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2 = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 \leq (N + M)^2 + M^2 < \infty,$$

also ist die Faltung erklärt.
δ ist finit und Satz 17.5 b) zeigt: $F * \delta = \delta * F$.

Wählt man $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ als $\eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \psi(\boldsymbol{x})\zeta(\boldsymbol{y}), \psi = \zeta = 1$ in $[-k, k]^n, k > 0$ so groß, daß $\operatorname{Tr} \psi$, $\operatorname{Tr} \zeta \subset [-k, k]^n$, $M_\varphi \subset [-k, k]^{2n}$ vgl. auch (17.4)), so folgt wegen $\zeta(\boldsymbol{0}) = 1$, $\operatorname{Tr} \psi \subset [-k, k]^n$

$$\langle F * \delta, \varphi \rangle = \langle F(\boldsymbol{x}), \langle \delta(\boldsymbol{y}), \psi(\boldsymbol{x})\zeta(\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \rangle \rangle = \langle F(\boldsymbol{x}), \psi(\boldsymbol{x})\zeta(\boldsymbol{0})\varphi(\boldsymbol{x}) \rangle = \langle F, \varphi \rangle.$$

Beweis b) Wegen $\operatorname{Tr} \partial^\alpha F \subset \operatorname{Tr} F$, $\operatorname{Tr} \partial^\alpha S \subset \operatorname{Tr} S$ existieren mit $F * S$ auch $\partial^\alpha F * S$, $F * \partial^\alpha S$, da die Streifenbedingung erfüllt ist, und wir berechnen für ein $a \in C^\infty$ und $|\alpha| \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\langle a\partial^\alpha (S * F), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle S * F, \partial^\alpha (a(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})) \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle S(\boldsymbol{y}), \langle F(\boldsymbol{x}), \eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\partial_x^\alpha [a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})] \rangle \rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|} \langle S(\boldsymbol{y}), \langle F(\boldsymbol{x}), \partial_x^\alpha [\eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})] \rangle \rangle .
\end{aligned}$$

Mit der verallgemeinerten Leibniz-Regel erhalten wir wegen $\partial_{\boldsymbol{x}}^{\gamma}\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ für $|\gamma| \geq 1$ und alle $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ aus einer Umgebung $U(M_\varphi)$

$$\partial^\alpha[\eta(a\varphi)]) = \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\partial^\beta\eta\,\partial^{\alpha-\beta}(a\varphi) = \eta\partial^\alpha(a\varphi) \quad \forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in U(M_\varphi).$$

Deshalb gilt weiter

$$\begin{aligned}
\langle a\partial^\alpha(S*F),\varphi\rangle &= \langle S(\boldsymbol{y}),\langle\partial^\alpha F(\boldsymbol{x}),\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle\rangle \\
&= \langle S(\boldsymbol{y}),\langle a\partial^\alpha F(\boldsymbol{x}),\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle\rangle \quad \textbf{nur wenn } a = \text{const}\textbf{.} \\
&= \langle S * a\partial^\alpha F,\varphi\rangle\,.
\end{aligned}$$

Für $a = \text{const}$ bedeutet dies

$$\begin{aligned}
a\partial^\alpha(S*F) &= S*(a\partial^\alpha F), \\
a\partial^\alpha(S*F) &= (a\partial^\alpha S)*F.
\end{aligned} \tag{17.9}$$

Die zweite Gleichung zeigt man entsprechend (mit $F*S = S*F$ und $\partial_x^\alpha[a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})] = \partial_y^\alpha[a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})]$.
(Für $a = 1$, $L = \partial^\alpha$ ist dies der Beweis von Satz 17.5 d)).
Man rechnet sofort nach, daß $F*S$ in F und S additiv ist. Dann folgt aus (17.9) sofort (17.7), und als Spezialfall (17.8) unter Benutzung von (17.6). ■

Warnung: In Stakgold II wird (17.8) ohne die Voraussetzung konstanter Koeffizienten bewiesen. Die Aussage und der angeführte Beweis sind falsch.

Zum Beweis von Regularitätseigenschaften von Lösungen partieller Differentialgleichungen benötigen wir die Regularitätseigenschaften der Faltung einer Distribution mit einer Testfunktion, die wir gesondert betrachten.

Faltung mit Testfunktionen, Regularisierung

Die Faltung einer Funktion $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ mit einer Testfunktion $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ existiert und läßt sich schreiben als

$$h(\boldsymbol{x}) := (f*g)(\boldsymbol{x}) = \int f(\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi} = \langle f(\boldsymbol{\xi}),g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\rangle$$

und somit distributionell deuten: Für jedes feste $\boldsymbol{x}$ ist $g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_\xi)$. Dies legt die Vermutung nahe, daß für jedes $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ gilt $(F*g)(\boldsymbol{x}) = \langle F(\boldsymbol{\xi}),g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\rangle$. In der Tat gilt der

Satz 17.7 Regularisierung
Sei $F \in \mathcal{D}'$, $g \in \mathcal{D}$, dann gilt

a) Für $h(\boldsymbol{x}) := \langle F(\boldsymbol{\xi}),g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\rangle$ ist $h \in C^\infty$.

b) $F*g = \langle F(\boldsymbol{\xi}),g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})\rangle \in \mathcal{D}'$ und es gilt $\langle F*g,\varphi\rangle = \langle h,\varphi\rangle \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Beachte:

1) Durch a) wird eine Funktion definiert. Natürlich stellt diese Funktion auch eine Distribution dar. Die Faltung $F * g$ ist als Distribution nach dem vorigen Satz erklärt. In b) wird damit die Gleichheit zweier Distributionen bewiesen.

2) Die Faltung mit einer Testfunktion hat *regularisierende Wirkung*, d.h. die Faltung einer Distribution mit einer Testfunktion ergibt eine reguläre (und wie!) Distribution, also eine Funktion.

Beweis:
$h(\boldsymbol{x})$ ist für alle $\boldsymbol{x}$ als Funktion definiert. Die Funktionswerte ergeben sich durch die Anwendung der Distribution auf die Testfunktion, und wie in Satz 17.3 a) zeigt man $h \in C^\infty$. Es bleibt also nur die Gleichheit in b) zu zeigen.

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt für ein geeignetes η (vgl. (17.4))

$$\begin{aligned}
\langle F * g, \varphi\rangle &= \langle F(\boldsymbol{x}) \otimes g(\boldsymbol{y}), \eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle \\
&= \langle F(\boldsymbol{x}), \langle g(\boldsymbol{y}), \eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle\rangle \\
&= \left\langle F(x), \textstyle\int g(\boldsymbol{y})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\ d\boldsymbol{y}\right\rangle .
\end{aligned}$$

Für hinreichend großes $r > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} g(\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &\subset \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2n};\ |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \le r,\ |\boldsymbol{y}| \le r\} \\
&\qquad \text{und, da} \quad |\boldsymbol{x}| \le |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| + |-\boldsymbol{y}| \le 2r \\
&\subset \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2n},\ |\boldsymbol{x}| \le 2r,\ |\boldsymbol{y}| \le 2r\}.
\end{aligned}$$

Deshalb können wir wählen

$$\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}) \cdot \alpha(\boldsymbol{y}), \quad \alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad \alpha = 1 \quad \text{für } |\boldsymbol{x}| \le 2r.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int g(\boldsymbol{y})\alpha(\boldsymbol{x})\alpha(\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\ d\boldsymbol{y} &= \int g(\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\ d\boldsymbol{y} \\
&\overset{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}}{=} \int g(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{\xi})\ d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int g(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x})\alpha(\boldsymbol{\xi})\varphi(\boldsymbol{\xi})\ d\boldsymbol{\xi} \\
&= \langle \varphi(\boldsymbol{\xi}), \alpha(\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x})\rangle , \quad \alpha(\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{x}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}).
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\langle F * g, \varphi \rangle &= \langle F(\boldsymbol{x}), \langle \varphi(\boldsymbol{\xi}), \alpha(\boldsymbol{\xi}) g(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}) \rangle \rangle \\
&= \langle \varphi(\boldsymbol{\xi}), \langle F(\boldsymbol{x}), \alpha(\boldsymbol{\xi}) g(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}) \rangle \rangle \quad \text{(Kommutativität)} \\
&= \langle \varphi(\boldsymbol{\xi}), \alpha(\boldsymbol{\xi}) \, \langle F(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}) \rangle \rangle \quad \text{(Linearität)} \\
&= \langle \varphi(\boldsymbol{\xi}), \alpha(\boldsymbol{\xi}) h(\boldsymbol{\xi}) \rangle \\
&= \int \varphi(\boldsymbol{\xi}) \alpha(\boldsymbol{\xi}) h(\boldsymbol{\xi}) \; d\boldsymbol{\xi} \qquad (Tr\, \varphi \subset Tr\, \alpha) \\
&= \int \varphi(\boldsymbol{\xi}) h(\boldsymbol{\xi}) \; d\boldsymbol{\xi} = \langle h(\boldsymbol{\xi}), \varphi(\boldsymbol{\xi}) \rangle \, . \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Man kann die Voraussetzung der Finitheit von g auf F verschieben und erhält

Korollar 17.8
Seien $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ finit und $g \in C^\infty$.
Dann ist

$$\begin{aligned}
&h = F * g \in C^\infty, \quad \text{wobei} \\
&h(\boldsymbol{x}) := \langle F(\boldsymbol{\xi}), g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \rangle := \langle F(\boldsymbol{\xi}), \alpha(\boldsymbol{\xi}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \rangle \\
&\text{mit} \quad \alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \ \alpha = 1 \quad \text{in einer Umgebung von } \operatorname{Tr} F.
\end{aligned}$$

Der Zusatz in der Definition von h ist, wie immer bei der Faltung, wichtig damit $\alpha(\boldsymbol{\xi}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_\xi) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Man zeigt dann wieder, daß die Definition unabhängig von α ist (vgl. Satz 17.5 Beweis a). Dann läßt sich der obige Beweis „unter geringen Änderungen“ auf den Fall des Korollars übertragen.

§ 18 Die Fourier-Transformation

Die Fouriertransformation für Funktionen

Die Fouriertransformation stellt ein wichtiges Handwerkszeug zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen dar.
Im eindimensionalen Fall ($1D$ -Fall) kann man sie als Grenzwert einer Fourier-Reihe gewinnen.

Die Fourier-Reihe einer Funktion f auf einem Intervall $[-\ell,\ell]\subset\mathbb{R}$ lautet

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\pi x/\ell) + b_n\sin(n\pi x/\ell))$$

mit den Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{l} f(x)\cos(n\pi x/\ell),$$
$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-l}^{\ell} f(x)\sin(n\pi x/\ell).$$

In der komplexen Schreibweise lautet sie (beachte: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)

(18.1)
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/\ell}$$

mit den Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(y)e^{-in\pi y/\ell}\ dy.$$

Einsetzen der Koeffizienten in (18.1) liefert (leicht umgeformt)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\ell}^{\ell} e^{-i\xi y}f(y)\ dy\right]e^{i\xi x}\,\frac{\pi}{\ell} \quad \text{mit} \quad \xi = n\pi/\ell.$$

Dies ist eine Riemann-Summe. Läßt man hier $\ell\to\infty$ gehen, so wird man erwarten (und kann auch beweisen, vgl. Folland)

(18.2)
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi y}\ dy\right]}_{=:\widehat{f}(\xi)}e^{i\xi x}\ d\xi.$$

Definition 18.1 Fourier-Transformation
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist die *Fourier-Transformation* $\widehat{f}$ die beschränkte, stetige Funktion im $\mathbb{R}^n$, die gegeben ist durch

$$F(f)(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i. \tag{18.3}$$

Bemerkungen:

1) Die Beschränktheit und Stetigkeit folgen aus

$$|\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})| \leq \int \underbrace{|e^{-i\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{x}}|}_{=1} |f(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x} = \|f\|_{L_1}.$$

2) F ist ein linearer, d.h. additiver und homogener Operator.

3) Die Fourier-Transformation im $\mathbb{R}^n$ ist nichts anderes als die sukzessive Ausführung von *partiellen* Fouriertransformationen im $\mathbb{R}^1$. Dabei werden die anderen Variablen als Konstante betrachtet:
$F_{\boldsymbol{x}} = F_{x_n} \cdot F_{x_{n-1}} \cdot \ldots \cdot F_{x_1}$, $\quad F_{x_i} \widehat{=}$ Fourier-Transformation bzgl. x_i, also

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int e^{-i\xi_1 x_1} \int e^{-i\xi_2 x_2} \ldots \int e^{-i\xi_n x_n} f(x_1, ..., x_n)\, dx_n ... dx_1$$

Wir demonstrieren die Fouriertransformation zunächst an einem

Beispiel: Gesucht wird

$$F(e^{-a\boldsymbol{x}^2})(\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi} - a\boldsymbol{x}^2} d\boldsymbol{x} \quad \text{für } a > 0.$$

Nun ist

$$i\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi} + a\boldsymbol{x}^2 = a(\boldsymbol{x}^2 + \frac{i\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi}}{a}) = a\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^2 + \frac{ix_j\xi_j}{a}\right),$$

und mit quadratischer Ergänzung folgt

$$= a\sum_{j=1}^{n}\left[\left(x_j + \frac{i\xi_j}{2a}\right)^2 + \frac{\xi_j^2}{4a^2}\right] = a\sum_{j=1}^{n}\left(x_j + \frac{i\xi_j}{2a}\right)^2 + \frac{\boldsymbol{\xi}^2}{4a}.$$

Damit folgt für das Integral (beachte das Minuszeichen)

$$F(e^{-a\boldsymbol{x}^2})(\boldsymbol{\xi}) = \left[\prod_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-a\left(x_j + i\frac{\xi_j}{2a}\right)^2} dx_j\right] e^{-\frac{\boldsymbol{\xi}^2}{4a}}.$$

Mit Hilfe des Cauchy'schen Integralsatzes zeigen wir, daß das Integral

$$I = \int_\gamma e^{-az^2}\, dz, \qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\ z = c = \text{konst.}\}$$

von c unabhängig ist.

Dazu erklären wir: Ist f eine in einem zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion und $k:\ z(t) = x(t) + iy(t),\ t \in [a,b]$, ein in G verlaufender, stückweis differenzierbarer Weg. Dann wird das Kurvenintegral definiert durch

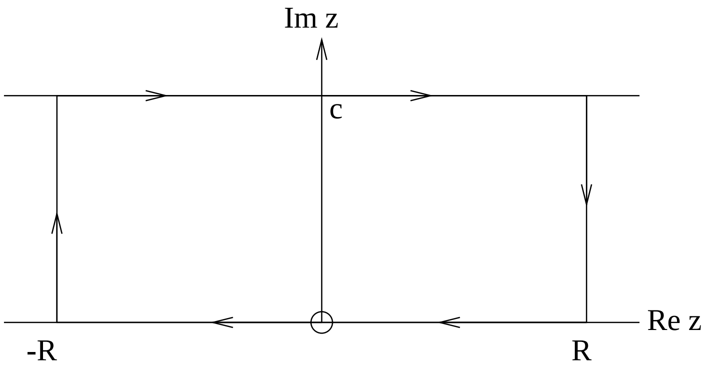
$$\int_k f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t)\ dt$$

Damit gilt der

Integralsatz von Cauchy
Sei f holomorph in einem einfachzusammenhängenden Gebiet $\subset \mathbb{C}$, so gilt für jeden geschlossenen Weg k, der ganz in G verläuft

$$\int_k f(z)\, dz = 0.$$

Wir wenden den Cauchy'schen Integralsatz an auf den Rand des Rechteckes $\{z \in \mathbb{C};\ |\mathrm{Re}\ z| \le R,\ 0 \le \mathrm{Im}\ z \le c\}$.



Der Streifen $0 \le \mathrm{Im}\ z \le c$ liegt in einem Gebiet, in dem der Integrand holomorph ist. Das Integral über den Rechtecksrand ∂R ist also $= 0$.

$$\int_{\partial R} e^{-az^2} dz = -\int_{-R}^{R} e^{-at^2} dt - \int_0^c e^{-a(R+it)^2}\, dt + \int_{-R}^{R} e^{-a(t+ic)^2}\, dt + \int_0^c e^{-a(-R+it)^2}\, dt = 0.$$

Wir lassen im Rechteck $R \to \infty$ gehen. Die Beträge des Integrals, die von den vertikalen Segmenten $\mathrm{Re}\ z = \pm R$ herrühren, verschwinden mit $R \to \infty$, da der Integrand gegen 0 konvergiert , und es folgt (beachte die Orientierung)

$$I = \int_\gamma e^{-az^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt \quad \text{mit} \quad t = \mathrm{Re}\ z.$$

Nebenrechnung: Berechnung des Integrals

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{x}^2} d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum x_i^2}\ d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n e^{-x_i^2}\ dx_1 \dots dx_n = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\ ds \right)^n =: A^n.$$

$$A^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(s^2+t^2)}\ dsdt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Polarkoord.}}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r\ drd\varphi = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r\ dr \underset{\substack{\uparrow \\ u=r^2}}{=} \pi \int_0^\infty e^{-u}\ du = \pi.$$

(18.4) $$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{x}^2} d\boldsymbol{x} \ = \ A^n \ = \ (A^2)^{n/2} \ = \ \pi^{n/2}.$$

Für $n = 1$ folgt daraus mit der Substitution $x = s\sqrt{a}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-as^2}\ ds \ = \ \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Damit erhält man

(18.5) $$F(e^{-a\boldsymbol{x}^2})(\boldsymbol{\xi}) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} \right)^n e^{-\frac{\boldsymbol{\xi}^2}{4a}}.$$

Mit Hilfe dieses Beispiels können wir die Formel für die inverse Fouriertransformation herleiten.
Die Gleichung (18.2) läßt vermuten, daß die inverse Transformation, sofern sie existert, folgende Form hat:

$$f(\boldsymbol{x}) = const \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\ d\boldsymbol{\xi}.$$

Das Integral existiert, falls $\widehat{f} \in L(\mathbb{R}^n)$. Bequemlichkeitshalber setzen wir zusätzlich $f \in L(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ voraus (vgl. Definition 18.1). Wir berechnen

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\ d\boldsymbol{\xi} = \iint e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\ e^{-i\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{\xi}} f(\boldsymbol{y})\ d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{\xi} \overset{Fubini}{=} \iint e^{-i(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\xi}} f(\boldsymbol{y})\ d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{y}.$$

Für eine stetige, beschränkte Funktion $\psi \in L(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi(0) = 1$ und $\widehat{\psi} \in L(\mathbb{R}^n)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\int\limits_{R^n} e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\ d\boldsymbol{\xi} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint \psi(\varepsilon\boldsymbol{\xi})e^{-i(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\xi}}f(\boldsymbol{y})\ d\boldsymbol{\xi}d\boldsymbol{y}, \qquad \text{subst. } \boldsymbol{z} = \varepsilon\boldsymbol{\xi},\ d\boldsymbol{z} = \varepsilon^n d\boldsymbol{\xi} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint \psi(\boldsymbol{z})e^{-i\ (\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}{\varepsilon})\cdot\boldsymbol{z}}f(\boldsymbol{y})\varepsilon^{-n}\ d\boldsymbol{z}d\boldsymbol{y} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \widehat{\psi}(\frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}{\varepsilon})f(\boldsymbol{y})\varepsilon^{-n}\ d\boldsymbol{y}, \qquad \text{subst. } \boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}{\varepsilon},\ d\boldsymbol{u} = \varepsilon^{-n}d\boldsymbol{y} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int \widehat{\psi}(\boldsymbol{u})f(\boldsymbol{x}+\varepsilon\boldsymbol{u})\ d\boldsymbol{u}, \qquad f \text{ stetig} \\
&= f(\boldsymbol{x})\int \widehat{\psi}(\boldsymbol{u})\ d\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{x})\cdot const.
\end{aligned}$$

Wir benötigen also nur noch eine Funktion ψ, für welche $\int \widehat{\psi}\ d\boldsymbol{u}$ berechenbar ist.

Das vorige Beispiel (vgl. (18.5)) zeigte

$$F(e^{-a\boldsymbol{x}^2})(\boldsymbol{\xi}) = \Big(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\Big)^n e^{-\frac{\boldsymbol{\xi}^2}{4a}}$$

Setzt man $a = \pi$, so gilt für $\psi(\boldsymbol{x}) = e^{-\pi\boldsymbol{x}^2}$: $\psi(\boldsymbol{0}) = 1,\ \widehat{\psi}(\boldsymbol{\xi}) = e^{-\frac{\boldsymbol{\xi}^2}{4\pi}}$.
Nun ist mit der vorigen Nebenrechnung

$$\int \widehat{\psi}(\boldsymbol{\xi})\ d\boldsymbol{\xi} = \int e^{\frac{-\boldsymbol{\xi}^2}{4\pi}}\ d\boldsymbol{\xi} \overset{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}/\sqrt{4\pi}}{=} \int e^{-\boldsymbol{x}^2}\Big(4\pi\Big)^{\frac{n}{2}}\ d\boldsymbol{x} \overset{(18.4)}{=} \Big(4\pi\Big)^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}} = (2\pi)^n.$$

Damit erhalten wir als Umkehrformel (zumindest für $f, \widehat{f} \in L(\mathbb{R}^n),\ f \in C(\mathbb{R}^n)$)

(18.6) $$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\ d\boldsymbol{\xi}.$$

Dies entspricht der Gleichung (18.2).

Bemerkung Die Definitionen der Fourier-Transformation und ihrer Inversen sind in der Literatur unterschiedlich, soweit es die Faktoren vor dem Integral betrifft. Der Faktor $(2\pi)^{-n}$ wird oft aufgeteilt. Dann erhalten sowohl die Fourier-Transformation als auch ihre Inverse den Faktor $(2\pi)^{-n/2}$.

Besonders geeignet für das Studium und die Anwendung der Fourier-Transformation ist der Raum $\mathcal{S}$ der schnell fallenden Funktion (Schwartz'scher Raum).

Definition 18.2 Schwartz'scher Raum $\mathcal{S}$
Für $\beta \in \mathbb{N}_0^n,\quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ sei $\boldsymbol{x}^\beta := \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i}$.

(18.7) $$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) :\ \sup_{\boldsymbol{x}} |\boldsymbol{x}^\beta\partial^\alpha\varphi(\boldsymbol{x})| < \infty \quad \forall\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n\}$$

heißt Raum der *schnell fallenden Funktionen* (Schwarz'scher Raum).

Die Definition bedeutet: $\partial^\alpha \varphi(\boldsymbol{x})$ fällt für $\boldsymbol{x} \to \infty$ schneller gegen Null als jedes Polynom gegen Unendlich wächst.

Gleichwertig sind folgende Definitionen: (beachte: $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum x_j^2}$) (Übung)

(18.8)
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \ |\partial^\alpha \varphi(\boldsymbol{x})| < \tfrac{C}{(1+|\boldsymbol{x}|)^m} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ und } m \in \mathbb{N}_0\}$$
oder
$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \ |\partial^\alpha \varphi(\boldsymbol{x})| < \tfrac{C}{(1+|\boldsymbol{x}|^m)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ und } m \in \mathbb{N}_0\}$$

Beispiele

(18.9)
$$\begin{aligned} &\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}, \\ &e^{-a|\boldsymbol{x}|^2} \in \mathcal{S}, \quad (a > 0), \\ &p\,\varphi \in \mathcal{S} \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S},\, p \text{ ein Polynom}, \\ &\partial^\alpha \varphi \in \mathcal{S}, \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}. \\ &\varphi\psi \in \mathcal{S} \text{ für } \varphi, \psi \in \mathcal{S} \text{ (Leibnizregel).} \end{aligned}$$

Definition 18.3	**Konvergenz in $\mathcal{S}$**	
$\{\varphi_k\} \in \mathcal{S}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = 0$	$\Leftrightarrow$ def	Für jedes Paar von Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ konvergiert $\boldsymbol{x}^\beta \partial^\alpha \varphi_k(\boldsymbol{x})$ in $\mathbb{R}^n$ für $k \to \infty$ gleichmäßig bzgl. x gegen Null.

Bemerkungen:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ ist durch $\lim\limits_{k\to\infty} (\varphi_k - \varphi) = 0$ erklärt.

2) Analog zu (18.8) kann in dieser Definition $\boldsymbol{x}^\beta$ auch durch $(1 + |\boldsymbol{x}|)^m$ bzw. $(1 + |\boldsymbol{x}|^m)$ für ein beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$ ersetzen.

Die wesentliche Bedeutung der Fourier-Transformation für die Anwendung liegt im folgenden Satz. Dabei benutzen wir (im Zusammenhang mit der Fourier-Transformation) aus schreibtechnischen Gründen die Bezeichnungen

(18.10)
$$D_j := -i\partial_j, \quad D^\alpha := (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha, \quad i^2 = -1, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Satz 18.4 Eigenschaften der Fourier-Transformation

a) Die Fourier-Transformation $F : \varphi \to \widehat{\varphi}$ bildet $\mathcal{S}$ (folgen-) stetig nach $\mathcal{S}$ ab.

b) Die Fourier-Transformation ist ein Isomorphismus auf $\mathcal{S}$ mit der

$$\textit{Inversionsformel} \quad f(\boldsymbol{x}) = F^{-1}(\widehat{f}) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi},$$

$$\text{oder äquivalent} \quad \widehat{\widehat{f}}(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^n \check{f}(\boldsymbol{x}) \text{ mit } \check{f}(\boldsymbol{x}) := f(-\boldsymbol{x}).$$

c) $F(D_j\varphi)(\boldsymbol{\xi}) = \xi_j F(\varphi)(\boldsymbol{\xi})$, bzw. $F(D^\alpha\varphi)(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^\alpha F(\varphi)(\boldsymbol{\xi})$,

d) $F(x_j\varphi)(\boldsymbol{\xi}) = -D_j F(\varphi)(\boldsymbol{\xi})$, bzw. $D^\alpha F(\varphi)(\boldsymbol{\xi}) = F((-\boldsymbol{x}^\alpha)\varphi)(\boldsymbol{\xi})$.

Bemerkungen zur Bedeutung der Fourier-Transformation:

1) b) zeigt die Bedeutung des Raums $\mathcal{S}$ für die Invertierbarkeit der Fourier-Transformation.

2) Die inverse Fourier-Transformation ist ebenfalls (bis auf Faktoren) eine Fourier-Transformation, denn äquivalent zur Umkehrformel für $\varphi \in \mathcal{S}$

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}$$

ist

$$f(-\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-n} \int e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}.$$

3) Durch c) werden Differentialgleichungen für eine Funktion in algebraische Gleichungen für ihre Fourier-Transformation verwandelt. Letztere sind oft einfacher zu lösen (vgl. dazu den letzten Abschnitt dieses Paragraphen).

Beweis d) Vorbemerkung: Es ist $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$ (vgl. (18.8),(18.9))) wegen

$$\begin{aligned}
\int |\varphi(\boldsymbol{x})|^p\, d\boldsymbol{x} &= \int \frac{1}{(1+|\boldsymbol{x}|)^m}(1+|\boldsymbol{x}|)^m|\varphi(\boldsymbol{x}))|^p\, d\boldsymbol{x} \\
&\leq C_1 \int \frac{1}{(1+|\boldsymbol{x}|)^m}\, d\boldsymbol{x} \\
&\leq \int\limits_{S_1} \int\limits_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r)^m}\, dr\, ds_1 \qquad (S_1 = \text{ Einheitssphäre des } \mathbb{R}^n) \\
&\leq C_2 \int\limits_0^\infty \frac{(1+r)^{n-1}}{(1+r)^m}\, dr \qquad \text{und für } m = n+1 \\
&= C_2 \int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+r)^2}\, dr = C_2 \frac{-1}{1+r}\Big|_0^\infty < \infty
\end{aligned}$$

Deshalb ist die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$ erklärt (vgl. Definition 18.2 und $p = 1$).

$\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = \int e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$ darf (unter dem Integral) beliebig oft differenziert werden. Wir zeigen das nach dem Prinzip der majorisierten Konvergenz (Lebesgue) für eine erste Ableitung:

Mit $\boldsymbol{he}_\nu = h_\nu$ ist

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{he}_\nu)-\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi})}{h_\nu} &= \int \frac{e^{i\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{he}_\nu)}-e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}}{h_\nu}\,\varphi(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}\\ &= \int e^{i\sum\limits_{j\neq\nu}\xi_j x_j}\Big(\frac{e^{ix_\nu(\xi_\nu+h_\nu)}-e^{ix_\nu\xi_\nu}}{h_\nu}\Big)\varphi(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}.\end{aligned}$$

Wir zeigen, daß der Integrand eine integrierbare Majorante hat.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{ia}-e^{ib}| = |e^{ib}||e^{i(a-b)}-1| \le \sqrt(2)|a-b|$, denn mit

$c = a - b,\;\; e^{ic} = \cos c + i\sin c,\;\; |z| = \sqrt{z\overline{z}}$ für $z \in \mathbb{C}$ folgt

$$|e^{ic}-1| = \sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos c} = \sqrt{2}\,\sqrt{\cos 0 - \cos c}$$

$$\overset{MWS}{\le} \sqrt{2}\,\sqrt{|c\sin(tc)|} \overset{|\sin(tc)|\le\ |tc|}{\le} \sqrt{2}\,\sqrt{tc^2} \overset{t\le 1}{\le} \sqrt{2}\,|c|.$$

Mit $a = x_\nu(\xi_\nu+h_\nu);\ b = x_\nu\xi_\nu$ ist $c = a-b = h_\nu x_\nu$ und damit

$$\Big|\frac{e^{ix_\nu(\xi_\nu+h_\nu)}-e^{ix_\nu\xi_\nu}}{h_\nu}\Big| \le \sqrt{2}\,\frac{|h_\nu x_\nu|}{|h_\nu|} \le \sqrt{2}\,|x_\nu|.$$

Da $\varphi \in \mathcal{S}$ hat man damit eine integrierbare Majorante für den Differenzenquotienten und damit für den Integranden. Wir können also unter dem Integral differenzieren. Beachtet man $\boldsymbol{x}^\alpha = \prod\limits_{i=1}^n x_i^{\alpha_i},\ D^\alpha := (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$, so folgt

$$D^\alpha\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = \int e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}(-\boldsymbol{x})^\alpha\varphi(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = F((-\boldsymbol{x})^\alpha\varphi)(\boldsymbol{\xi}) \quad (\Rightarrow \widehat{\varphi}\in C^\infty). \tag{18.11}$$

Beweis c) Partielle Integration von (18.11) liefert

$$\begin{aligned} D^\alpha\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) &= (-1)^{|\beta|}\int \frac{e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}}{(-i)^{|\beta|}(\boldsymbol{\xi}^\beta)}\partial^\beta[(-\boldsymbol{x})^\alpha\varphi(\boldsymbol{x})]\,d\boldsymbol{x}\\ &= \boldsymbol{\xi}^{-\beta}\int e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}D^\beta[(-\boldsymbol{x})^\alpha\varphi(\boldsymbol{x})]\,d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}^{-\beta}F\Big(D^\beta((-\boldsymbol{x})^\alpha\varphi)\Big)(\boldsymbol{\xi}),\end{aligned}$$

denn die *integralfreien* Terme verschwinden wegen $\varphi \in \mathcal{S}$, also

$$\boldsymbol{\xi}^\beta D^\alpha\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = \int e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}D^\beta[(-\boldsymbol{x})^\alpha\varphi(\boldsymbol{x})]\,d\boldsymbol{x} = F\Big(D^\beta((-\boldsymbol{x})^\alpha\varphi)\Big)(\boldsymbol{\xi}). \tag{18.12}$$

Für $\alpha = \theta$ ist die die Behauptung von c).

Beweis a) Wir zeigen das *schnelle Fallen.*
Erweitert man in (18.12) den Integranden mit $(1+|\boldsymbol{x}|)^{n+1}$, so folgt

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{\xi}^\beta D^\alpha(\widehat{\varphi})(\boldsymbol{\xi})| &\leq \int \underbrace{|e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}|}_{=1} \frac{1}{(1+|\boldsymbol{x}|)^{n+1}} (1+|\boldsymbol{x}|)^{n+1} \, |D^\beta[(-\boldsymbol{x})^\alpha\varphi(\boldsymbol{x})]| \, d\boldsymbol{x} \\
&\leq \underbrace{\sup_{\boldsymbol{x}} \underbrace{\{(1+|\boldsymbol{x}|)^{n+1} \underbrace{|D^\beta[(-\boldsymbol{x})^\alpha\varphi(\boldsymbol{x})]|}_{\in\mathcal{S}\text{ nach (18.9)}}\}}_{\in\mathcal{S}\text{ nach (18.9)}}}_{<\infty\text{ nach (18.8)}} \underbrace{\int \frac{1}{(1+|\boldsymbol{x}|)^{n+1}} \, d\boldsymbol{x}}_{<\infty}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow\ \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ nach (18.7).

Aus der letzten Abschätzung erhält man mit Hilfe der Leibnizformel die (Folgen-) Stetigkeit von F (vgl. (18.12) und Definition 18.3).

Beweis b) Die Formel für die inverse Fouriertransformation wurde schon in (18.6) hergeleitet. Die inverse Transformation ist wieder eine Fouriertransformation, bildet also $\mathcal{S}$ stetig nach $\mathcal{S}$ ab. Also ist die Fouriertransformation ein Isomorphismus auf $\mathcal{S}$. Die Äquivalenz zur Umkehrformel ergibt sich aus

$$
\begin{aligned}
\check{f}(\boldsymbol{x}) := f(-\boldsymbol{x}) &= (2\pi)^{-n} \int e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} = (2\pi)^{-n} \widehat{\widehat{f}}(\boldsymbol{x}), \quad \text{also} \\
\widehat{\widehat{f}}(\boldsymbol{x}) &= (2\pi)^n \check{f}(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
$$

■

Weitere Beispiele für die Fourier-Transformation werden wir bei der Konstruktion von Fundamentallösungen kennenlernen.

Temperierte Distributionen

Definition 18.5 temperierte Distributionen
Ein stetiges, lineares Funktional f auf $\mathcal{S}$ heißt *temperierte Distribution.*

$$\mathcal{S}' = \text{Menge der temperierten Distributionen.}$$

Stetigkeit bedeutet:

$\lim\limits_{k\to\infty} \langle f, \varphi_k\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ für $f \in \mathcal{S}'$, $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{S}$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k = \varphi$ in $\mathcal{S}$, (vgl. Def. 18.3).

Beispiele:

(18.13) $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ wegen $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.

Genauer: Die Restriktion von $\mathcal{S}'$ auf $\mathcal{D}$ kann mit einem Unterraum von $\mathcal{D}'$ identifiziert werden.

(18.14) $L^p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'$, für $p \geq 1$, denn für $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}$ erhält man mit der Hölder-Ungleichung

$$|\int f\varphi \, d\boldsymbol{x}| \leq \underbrace{\Big(\int |f|^p \, d\boldsymbol{x}\Big)^{1/p}}_{<\infty} \underbrace{\Big(\int |\varphi|^q \, d\boldsymbol{x}\Big)^{1/q}}_{<\infty}, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und es ist $\varphi \in L^q$ (Definition 18.2) wegen

$$\int (\varphi(\boldsymbol{x}))^q \, d\boldsymbol{x} = \int \frac{1}{(1+|\boldsymbol{x}|)^m} (1+|\boldsymbol{x}|)^m (\varphi(\boldsymbol{x}))^q \, d\boldsymbol{x} < \infty$$

für hinreichend großes m (vgl. Beweis d) von Satz 18.4).
Für $p = 1$ gilt direkt $|\int f\varphi \, d\boldsymbol{x}| \leq const. \int |f| \, d\boldsymbol{x} < \infty$.

(18.15)
$$f \in \mathcal{S}' \;\Rightarrow\; pf \in \mathcal{S}' \quad \text{für jedes Polynom } p$$
$$\varphi f \in \mathcal{S}' \quad \text{für } \varphi \in \mathcal{S}.$$

Die *langsam wachsenden (temperate) Funktionen*

(18.16)
$$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n): \; \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \; \exists N \in \mathbb{N}_0: \; \lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty} |\boldsymbol{x}|^{-N} |\partial^\alpha f(\boldsymbol{x})| = 0,$$

gehören zu $\mathcal{S}'$.
Langsam wachsend bedeutet: nicht schneller wachsend als ein Polynom, d.h. mit einer von m abhängigen Konstanten C_m gilt

$$|f(\boldsymbol{x})| \leq C_m |\boldsymbol{x}|^m, \; m \in N, \quad \text{für große } \boldsymbol{x}, \quad \text{bzw. } |f(\boldsymbol{x})| \leq C_m (1+|\boldsymbol{x}|)^m.$$

Gelegentlich werden die langsam wachsenden Funktionen auch ohne die Differenzierbarkeitsforderung definiert als $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ zusammen mit der Wachstumsbeschränkung für $\alpha = 0$.

(18.17)
$$f \in \mathcal{S}' \quad \Rightarrow \quad gf \in \mathcal{S}' \;\text{ für } g \in \mathcal{S}.$$

(18.18)
$$f \in \mathcal{S}' \quad \Rightarrow \quad \partial^\alpha f \in \mathcal{S}' \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Beachte: Die letzte Aussage brauchen wir nicht zu beweisen, denn wegen (18.13) übertragen sich die Definitionen für Translationen, Differentiationen, Multiplikationen mit langsam wachsenden Funktionen auf die temperierten Distributionen.

Dies gilt nicht für die Multiplikation mit beliebigen C^∞- Funktionen!
Warum nicht?

Erweiterungen von Funktionseigenschaften auf Distributionen erfolgen immer nach dem Permanenzprinzip. Grundlegend für die Definition der Fourier-Transformation von temperierten Distributionen ist

Satz 18.6
Für $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad (\supset S)$ gilt

$$\int \widehat{\varphi}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x} = \int \varphi(\boldsymbol{x})\widehat{\psi}(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x}. \tag{18.19}$$

Beweis: $\widehat{\varphi}$ ist beschränkt (vgl. Bemerkung 1) nach Definition 18.1). Also existiert

$$|\int \widehat{\varphi}(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x}| \le \int |\widehat{\varphi}(\boldsymbol{x})|\ |\psi(\boldsymbol{x})|\ d\boldsymbol{x} \le \|\widehat{\varphi}\|_\infty \|\psi\|_{L_1}.$$

Ebenso ist das 2. Integral beschränkt. Deshalb gilt

$$\int \widehat{\varphi}\psi\ d\boldsymbol{x} = \int\int e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}}\varphi(\boldsymbol{\xi})\ d\boldsymbol{\xi}\ \psi(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x} = \int\int e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\psi(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x}\ \varphi(\boldsymbol{\xi})\ d\boldsymbol{\xi} = \int \widehat{\psi}\varphi\ d\boldsymbol{\xi}.$$

Die Integrationsreihenfolge darf vertauscht werden, da die Integrale absolut konvergent sind (Fubini). ∎

Die Fouriertransformation für temperierte Distributionen

Im Anschluß an Satz 18.6 erklären wir

Definition 18.7
Für $u \in \mathcal{S}'$ wird die Fouriertransformation definiert durch

$$\widehat{u}(\varphi) = \langle \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}), \varphi(\boldsymbol{\xi})\rangle := u(\widehat{\varphi}) = \langle u(\boldsymbol{x}), \widehat{\varphi}(\boldsymbol{x})\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Wir wollen Satz 18.4 auf $\mathcal{S}'$ ausdehnen.
Die letzte Definition besagt: $u \in \mathcal{S}' \Rightarrow \widehat{u} \in \mathcal{S}'$, da $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$, d.h. die Fourier-Transformation bildet $\mathcal{S}'$ nach $\mathcal{S}'$ ab.
Mit dem Konvergenzbegriff

Definition 18.8 Konvergenz in $\mathcal{S}'$

$$\{u_k\} \subset \mathcal{S}',\ u_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \in \mathcal{S}' \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \langle u_k, \varphi\rangle \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle u, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

folgt unmittelbar:

Die Fourier-Transformation ist eine stetige Abbildung von $\mathcal{S}'$ nach $\mathcal{S}'$.
Für ihre Umkehrung erhält man (vgl. Satz 18.4) für $u \in \mathcal{S}$:

$$\widehat{\widehat{u}}(\varphi) = u(\widehat{\widehat{\varphi}}) = (2\pi)^n u(\check{\varphi}) =: (2\pi)^n \check{u}(\varphi), \quad \text{wobei} \quad \check{u}(\varphi) := u(\check{\varphi}).$$

Daß die Eigenschaften c),d) aus Satz 18.4 auch in $\mathcal{S}'$ gelten, rechnet man nach (Übung).

Damit erhalten wir aus Satz 18.4 den

Satz 18.9 Eigenschaften der Fourier-Transformation in $\mathcal{S}'$

a) Die Fourier-Transformation F: $f \to \widehat{f}$ bildet $\mathcal{S}'$ (folgen-) stetig nach $\mathcal{S}'$ ab.

b) Die Fourier-Transformation ist ein Isomorphismus auf $\mathcal{S}'$ mit der

Umkehrformel $\widehat{\widehat{u}} = (2\pi)^n \check{u} \quad \forall u \in \mathcal{S}',$ $\quad (\, \check{u}(\varphi) := u(\check{\varphi}),\ \check{\varphi}(\boldsymbol{x}) := \varphi(-\boldsymbol{x})\,).$

c) $\widehat{D_j f}(\boldsymbol{\xi}) = \xi_j \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}),$ bzw. $F(D^\alpha f)(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}^\alpha F(f)(\boldsymbol{\xi})\,,$

d) $\widehat{x_j f}(\boldsymbol{\xi}) = -D_j \widehat{f}(\boldsymbol{\xi}),$ bzw. $D^\alpha F(f)(\boldsymbol{\xi}) = F((-\boldsymbol{x}^\alpha) f)(\boldsymbol{\xi}).$

Beispiel 1:
Die δ-Distribution ist auch für $\varphi \in \mathcal{S}$ definiert durch

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(0),$$

und mit Definition 18.7 folgt sofort

$$\left\langle \widehat{\delta}, \varphi \right\rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \left\langle \delta, \int e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \varphi(\boldsymbol{\xi})\ d\boldsymbol{\xi} \right\rangle = \int \varphi(\boldsymbol{\xi})\ d\boldsymbol{\xi} = \langle \mathbf{1}, \varphi \rangle\,.$$

Die Funktion $\mathbf{1}$ ist langsam wachsend. Es gilt also

$$\widehat{\delta} = \mathbf{1}. \tag{18.20}$$

Die Fouriertransformation kann also Distributionen (auch singuläre) in Funktionen transformieren und umgekehrt.

Beispiel 2: (vgl. (13.5))
Wir transformieren die singuläre Distribution $V_R \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (vgl. Triebel §10)

$$\langle V_R, \varphi \rangle := \int\limits_{|\boldsymbol{x}|=R} \varphi(\boldsymbol{x})\ ds_R, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^3,\ \{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x}| \le R\ \} \subseteq \mathcal{D}(\Omega) \tag{18.21}$$

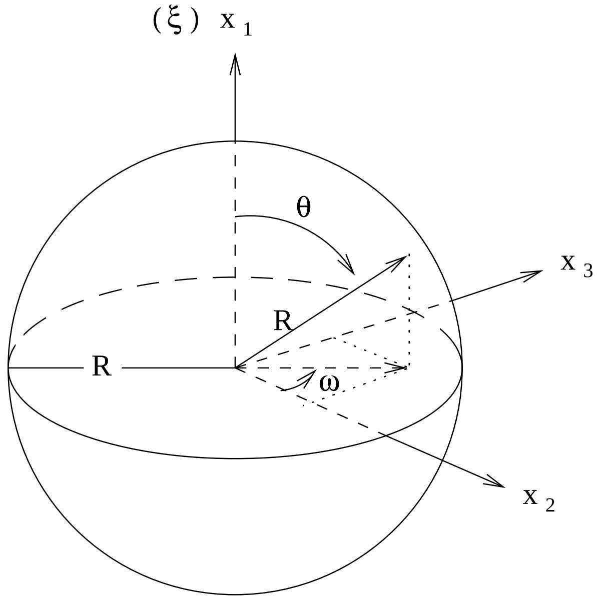
Ist $\mathcal{D}(\Omega) = \Omega$, so kann wegen $\{\boldsymbol{x} : |\boldsymbol{x}| = R\ \}$ kompakt, auch $\varphi \in \mathcal{S}$ zugelassen werden. Beachte $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

$$\left\langle \widehat{V}_R, \varphi \right\rangle = \langle V_R, \widehat{\varphi} \rangle = \int\limits_{|\boldsymbol{x}|=R} \int\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}} \varphi(\boldsymbol{\xi})\ d\boldsymbol{\xi} ds_R = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(\boldsymbol{\xi}) \int\limits_{|\boldsymbol{x}|=R} e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\ ds_R d\boldsymbol{\xi}.$$

Es ist $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\xi} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{\xi}| \cos\theta$. Führe Polarkoordinaten ein, so daß die ξ_1-Achse durch den „Nordpol des Koordinatensystems“ geht (vgl. Abb.)

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta, && 0 \le \theta \le \pi \\ x_2 &= r\sin\theta\cos\omega, && 0 \le \omega \le 2\pi \\ x_3 &= r\sin\theta\sin\omega. \end{aligned}$$

Dann ist
$$\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(r,\theta,\omega)} = r^2\sin\theta, \qquad d\boldsymbol{x} = r^2\sin\theta\; d\theta\, d\omega\, dr = ds_r dr.$$



Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{V}_R, \varphi \right\rangle = \langle F(V_R), \varphi\rangle &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(\boldsymbol{\xi})\; R^2 \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} \underbrace{e^{-iR|\boldsymbol{\xi}|\cos\theta}\sin\theta}_{\frac{1}{iR|\boldsymbol{\xi}|}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(e^{-iR|\boldsymbol{\xi}|\cos\theta}\right)}\; d\theta\; d\omega\; d\boldsymbol{\xi} \\ &= \frac{2\pi R}{i}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}|}\left[e^{-iR|\boldsymbol{\xi}|\cos\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi}\; d\boldsymbol{\xi} \\ &= 2\pi R\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{\xi}|}\left(\frac{e^{iR|\boldsymbol{\xi}|}-e^{-iR|\boldsymbol{\xi}|}}{i}\right) d\boldsymbol{\xi} \\ &= 4\pi R\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin R|\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{\xi}|}\varphi(\boldsymbol{\xi})\; d\boldsymbol{\xi},\end{aligned}$$

und man erkennt: Die Fouriertransformation $F(V_R)$ von (18.21) ist

(18.22) $$F(V_R)(\boldsymbol{\xi}) = 4\pi R\,\frac{\sin R|\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{\xi}|}, \quad F(V_R) \in \mathcal{S}' \cap L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

also eine Funktion, und für die Umkehrtransformation (siehe Satz 18.9) gilt

(18.23) $$F^{-1}\left(\frac{\sin R|\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{\xi}|}\right) = \frac{1}{4\pi R}V_R.$$

Wieder werden also Funktionen in Distributionen (sogar singuläre) transformiert und umgekehrt. Man kann (18.22) natürlich auch direkt ausrechnen (vgl. Szmydt §21.2).

Dies ist jedoch langwieriger.

Wegen $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ sind direkte Produkte als Distributionen $\langle u \otimes v, \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}$ für $u, v \in \mathcal{S}'$ erklärt. Ihre Definition als temperierte Distributionen (analog zu Satz 17.3 a)-c)) ist problemlos.
Wir können direkte Produkte von Fourier-Transformierten bilden und die Fourier-Transformation auf ein direktes Produkt von Distributionen anwenden (vgl. dazu Bemerkung 3 nach Definition 18.1). Wir zeigen:

Satz 18.10
Für $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$ gilt:

$$\langle F_{\boldsymbol{x}}(u) \otimes F_{\boldsymbol{y}}(v), \varphi \rangle = \langle F(v \otimes u), \varphi \rangle \,, \tag{18.24}$$

$$\langle F_{\boldsymbol{x}}(u(\boldsymbol{x}) \otimes v(\boldsymbol{y})), \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rangle = \langle F_{\boldsymbol{x}}(u) \otimes v, \varphi \rangle \,. \tag{18.25}$$

Dabei bezeichnen die Indizes die Variablen, bzgl. derer die Distribution, auf welche die Fouriertransformation angewandt wird, wirkt.

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+m})$, $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle F_{\boldsymbol{x}}(u) \otimes F_{\boldsymbol{y}}(v), \varphi \rangle &= \langle F_{\boldsymbol{x}}(u), \langle F_{\boldsymbol{y}}(v), \varphi \rangle \rangle && \text{Definition des direkten Produktes} \\
&= \langle F_{\boldsymbol{x}}(u), \langle v, F_{\boldsymbol{y}}(\varphi) \rangle \rangle && \text{Definition der Fourier-Transformation} \\
&= \langle v, \langle F_{\boldsymbol{x}}(u), F_{\boldsymbol{y}}(\varphi) \rangle \rangle && \text{Kommutat. des direkten Produktes} \\
&= \langle v, \langle u, F_{\boldsymbol{x}} F_{\boldsymbol{y}}(\varphi) \rangle \rangle \\
&= \langle v \otimes u, F(\varphi) \rangle \\
&= \langle F(v \otimes u), \varphi \rangle \,.
\end{aligned}$$

Entsprechend gilt für die „partielle“ Fouriertransformation

$$\begin{aligned}
\langle F_{\boldsymbol{x}}(u(\boldsymbol{x}) \otimes v(\boldsymbol{y})), \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \rangle &= \langle u \otimes v, F_{\boldsymbol{x}}(\varphi) \rangle \\
&= \langle v, \langle u, F_{\boldsymbol{x}}(\varphi) \rangle \rangle \\
&= \langle v, \langle F_{\boldsymbol{x}}(u), \varphi \rangle \rangle \\
&= \langle v \otimes F_{\boldsymbol{x}}(u), \varphi \rangle \\
&= \langle F_{\boldsymbol{x}}(u) \otimes v, \varphi \rangle \,.
\end{aligned}$$

■

Anwendung der Fouriertransformation auf partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Sei

$$p(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n$$

ein Polynom mit konstanten Koeffizienten und

$$Lu = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha u =: p(D)u, \quad D^\alpha = \left(\frac{1}{i}\right)^{|\alpha|} \partial^\alpha \tag{18.26}$$

der zugehörige Differentialoperator, so gilt nach den Ableitungsregeln (Satz 18.4)

$$\widehat{p(D)u}(\boldsymbol{\xi}) = p(\boldsymbol{\xi}) \cdot \widehat{u}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1 \ldots, \xi_n)^T. \tag{18.27}$$

Man hat damit folgende Äquivalenzen

$$Lu = p(D)u = f \quad \Longleftrightarrow \quad p(\xi)\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{p(\xi)}$$

Bei Anwendung der Fouriertransformation auf eine Differentialgleichung $Lu = f$ wird die Differentialgleichung für u in eine algebraische Gleichung für $\widehat{u}$ transformiert. Diese ist leicht zu lösen. Allerdings muß dann die Lösung $\widehat{u}$ wieder rücktransformiert werden um eine Lösung u der Differentialgleichung zu erhalten. Wir werden auf diese Weise Fundamentallösungen konstruieren.

Die Fourier-Transformation von Faltungen und Produkten

Die letzte wichtige Eigenschaft der Fouriertransformation, die wir später benötigen, ist, daß sie Produkte in Faltungen überführt und umgekehrt. Wir zeigen dies für Funktionen. Dies motiviert, daß entsprechende Eigenschaften auch für Distributionen gelten.

Satz 18.11
Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, dann gilt

a) $\mathcal{S} \cdot \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ und $\widehat{\varphi \cdot \psi} = (2\pi)^{-n} \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$

b) $\mathcal{S} * \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ und $\widehat{\varphi * \psi} = \widehat{\varphi} \cdot \widehat{\psi}$

Beweis a)
$\mathcal{S} \cdot \mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ folgt gemäß Definition 18.2 mit der verallgemeinerten Leibnizformel für Ableitungen: Für $\alpha, \mu, \nu \in \mathbb{N}_0^n$ gilt

$$\partial^\alpha(\varphi\psi) = \sum_{\nu+\mu=\alpha} c_{\mu\nu} \partial^\mu \varphi \, \partial^\nu \psi, \quad c_{\mu\nu} \in \mathbb{R}, \quad \text{(Übung).}$$

Wegen $\varphi\psi \in \mathcal{S}$ existiert nun $\widehat{\varphi\psi}(\boldsymbol{\xi}) = \int e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\varphi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x}$, und mit der Inversionsformel, angewandt auf φ, folgt

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi\psi}(\boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\psi(\boldsymbol{x})\int e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\eta}}\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\eta})\ d\boldsymbol{\eta}d\boldsymbol{x}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int \underbrace{\int e^{-i\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})}\psi(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x}}_{\widehat{\psi}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\eta})}\ \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\eta})\ d\boldsymbol{\eta}\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}(\widehat{\psi}*\widehat{\varphi})\,(\boldsymbol{\xi}).\end{aligned}$$

Beweis b)

Die letzte Formel zeigt $\mathcal{S}*\mathcal{S}\subset\mathcal{S}$, denn $\widehat{\varphi\psi}\in\mathcal{S}$, und die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus auf $\mathcal{S}$ (Satz 18.4 b)).

Wir wenden a) an auf $\widehat{\varphi}\cdot\widehat{\psi}$, und unter Verwendung der Inversionsformel (Satz 18.9)

$$\widehat{\widehat{u}}(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^n u\,(-\boldsymbol{x})$$

erhalten wir

$$\widehat{\widehat{\varphi}\cdot\widehat{\psi}} = (2\pi)^{-n}\widehat{\widehat{\varphi}}*\widehat{\widehat{\psi}} \overset{\text{Satz 18.9}}{=} (2\pi)^{-n}(2\pi)^n\check{\varphi}*(2\pi)^n\check{\psi},\quad (\check{\psi}(\boldsymbol{x}) := \psi(-\boldsymbol{x})).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}(\check{\varphi}*\check{\psi})(\boldsymbol{x}) &= \int\check{\varphi}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\check{\psi}(\boldsymbol{y})\ d\boldsymbol{y} = \int\varphi(-\boldsymbol{x}-(-\boldsymbol{y}))\psi(-\boldsymbol{y})\ d\boldsymbol{y}\\ &\overset{\boldsymbol{z}=-\boldsymbol{y}}{=} \int\varphi(-\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})\psi(\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z} = (\varphi*\psi)(-\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

Beachte bei der Substitution $\boldsymbol{z}=-\boldsymbol{y}$, daß $(-1)^n$ entfällt, da durch die Schreibweise des Integrals die Grenzen automatisch mitsubstituiert werden.

Damit folgt insgesamt

$$\widehat{\widehat{\varphi}\cdot\widehat{\psi}} = (2\pi)^n(\varphi*\psi)\check{}.$$

Fourier-Transformation und Inversionsformel liefern

$$(2\pi)^n\widehat{(\varphi\check{*}\psi)} = \widehat{\widehat{\widehat{\varphi}\cdot\widehat{\psi}}} = (2\pi)^n\left(\widehat{\varphi}\cdot\widehat{\psi}\right)\check{},$$

und da für beliebiges $\phi\in\mathcal{S}$ gilt

$$\widehat{\check{\phi}}(\boldsymbol{\xi}) = \int e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\phi(-\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x} = \int e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\phi(\boldsymbol{x})\ d\boldsymbol{x} = \widehat{\phi}(-\boldsymbol{\xi}) = \check{\widehat{\phi}}(\boldsymbol{\xi})$$

folgt schließlich für $\phi = \widehat{\varphi}\cdot\widehat{\psi}$

$$\widehat{\varphi*\psi} = \widehat{\varphi}\cdot\widehat{\psi},$$

und damit die Behauptung. ■

Natürlich kann man diese Eigenschaften auf Distributionen übertragen. Die Technik ist etwas aufwendig. Wir zitieren deshalb nur ein Ergebnis (vgl. Hörmander I, Th. 7.1.15 oder Yoshida, Ch. VI, Th. 6).

Satz 18.12
Für $u_1 \in \mathcal{S}'$, $u_2 \in \mathcal{E}'$, ($\mathcal{E}' =$ Menge der Distribution mit kompaktem Träger), folgt

$$u_1 * u_2 \in \mathcal{S}' \quad \text{und} \quad \widehat{u_1 * u_2} = \widehat{u}_1 \cdot \widehat{u}_2.$$

Bemerkung: Zum Verständnis muß man wissen (beweisen), daß $\widehat{u}_2 \in C^\infty$ von langsamem Wachstum ist, was aus der Finitheit von u_2 folgt.

Kapitel V

Anwendungen Distributioneller Lösungen

§ 19 Fundamentallösungen und Regularität

Definition 19.1 Fundamentallösung
L sei ein linearer Differentialoperator der Ordnung r mit C^∞-Koeffizienten.

$$Lu = \sum_{|\alpha| \le r} a_\alpha \partial^\alpha u. \tag{19.1}$$

Eine *Fundamentallösung* für L mit Pol $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ ist eine Distribution $E_{\boldsymbol{\xi}}$ mit $L[E_{\boldsymbol{\xi}}] = \delta_{\boldsymbol{\xi}}$, d.h. $\langle L[E_\xi](\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle = \langle \delta_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x})\rangle$, also

$$\langle E_{\boldsymbol{\xi}}, L^*\varphi\rangle = \varphi(\boldsymbol{\xi}), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{19.2}$$

Bezeichnungen: $E_{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi})$, $E_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{x}|\,\mathbf{0}) = E$.

Bemerkung: $E(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi})$ ist nicht eindeutig. Je zwei Fundamentallösungen mit gleichem Pol unterscheiden sich um eine distributionelle Lösung von $L[u] = 0$.

Bedeutung der Fundamentallösung: Konstruktion von (eindeutigen) Lösungen von Differentialgleichungen,Regularitätsaussagen für die Lösungen, Beschreibung physikalischer Phänomene. Erste Eigenschaften liefert

Satz 19.2
Sei L ein Differentialoperator mit **konstanten** Koeffizienten,
$E(\boldsymbol{x}|\mathbf{0})$ eine Fundamentallösung mit Pol $\mathbf{0}$.

a) Dann ist $E(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\xi}) := E(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|\mathbf{0})$, (Fundamentallösungen zu verschiedenen Polen)

b) Ist $q \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $u = q * E$ erklärt, so ist u eine distributive Lösung von $L[u] = q$. (Lösung der inhomogenen Gleichung).

c) $L[u] = q$ hat höchstens eine Lösung in der Klasse der Distributionen, die eine Faltung mit E gestatten (Eindeutigkeit der Lösung in dieser Klasse).

Beweis a)
Zeige (19.2). Laut Definition der Translation einer Distribution gilt

$$\langle E(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|\mathbf{0}), L^*[\varphi](\boldsymbol{x})\rangle = \langle E(\boldsymbol{x}|\mathbf{0}), L^*[\varphi](\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle .$$

Mit $\psi(x) := \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})$, also $\psi \in \mathcal{D}$, folgt $L^*[\varphi](\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi}) = L^*[\psi](\boldsymbol{x})$ für *konstante* Koeffizienten (!!!). Für nicht konstante Koeffizienten wirkt sich die Translation auch auf die Koeffizienten aus. Daher ist

$$\langle E(\boldsymbol{x}|\mathbf{0}), L^*[\varphi](\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\rangle = \langle E(\boldsymbol{x}|\mathbf{0}), L^*[\psi](\boldsymbol{x})\rangle \overset{(19.2)}{=} \psi(\mathbf{0}) = \varphi(\boldsymbol{\xi}).$$

Beweis b)

$$L[q*E] \overset{(17.7)}{=} q * L[E] = q * \delta \overset{(17.6)}{=} q.$$

Beweis c)
Für die Lösungen u_i von $Lu_i = q$, $i = 1, 2$, sei $u_i * E$ erklärt. Dann ist

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &\overset{(17.6)}{=} (u_1 - u_2) * \delta = (u_1 - u_2) * L[E] \\ &\overset{(17.7)}{=} (L[u_1 - u_2]) * E = \mathbf{0} * E = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Beachte: (17.7) benötigt die Existenz von $u_i * E$. ■

Fundamentallösung für den Laplace-Operator und Fundamentaltheorem

(vgl. Walter: Potentialtheorie)

Gesucht wird eine Lösung von

(19.3) $$-\Delta E = \delta_{\boldsymbol{x}_0}, \quad \text{d.h.} \quad -\langle E, \Delta\varphi\rangle = \varphi(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Physikalisch beschreibt E im $\mathbb{R}^3$ eine stationäre Wärmeverteilung (vgl. § 3) bei Vorliegen einer auf den Punkt $\boldsymbol{x}_0$ konzentrierten Einheitswärmequelle. In der Elektrostatik kann man herleiten, daß durch (19.3) das Potential einer im Punkt $\boldsymbol{x}_0$ konzentrierten Einheitsladung beschrieben wird. Der vorige Satz zeigt, daß dabei der Punkt $\boldsymbol{x}_0$ keine Sonderrolle spielt.

Vorüberlegungen:

1) Der Laplace-Operator ist rotationssymmetrisch, d.h. für die Transformation $u(\boldsymbol{x}) = \tilde{u}(\boldsymbol{y}):\quad \boldsymbol{y} = B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0$ mit einer orthogonalen Matrix B (d.h. $BB^T = B^TB = I$) gilt $\Delta_{\boldsymbol{x}} u = \Delta_{\boldsymbol{y}} \tilde{u}$ (Übung, nachrechnen).
Bemerkung: Die Translation fällt beim Ableiten weg.

2) $\delta_{\boldsymbol{x}_0}$ ist rotationssymmetrisch bzgl. $\boldsymbol{x}_0$. Deshalb ist die Differentialgleichung

$$-\Delta E = \delta_{\boldsymbol{x}_0} \tag{19.4}$$

offensichtlich rotationssymmetrisch bzgl. $\boldsymbol{x}_0$.

Also ist es sinnvoll zunächst nach rotationssymmetrischen Lösungen von $\Delta u = 0$ zu suchen (E soll schließlich, abgesehen von $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ die Laplacegleichung erfüllen). Solche Lösungen haben wir bereits berechnet (vgl. (6.16), S. 48). Zur Erinnerung zitieren wir sie nochmals.

$$v(r) = \begin{cases} \dfrac{Cr^{2-n}}{2-n} & , \quad n \neq 2 \\ C \log r & , \quad n = 2 \end{cases} \qquad \text{(+ Integrationskonstanten ggf.)} \tag{19.5}$$

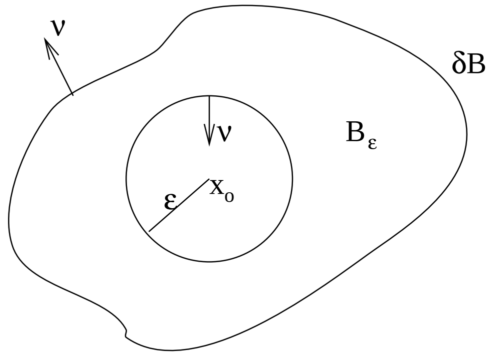
v ist lokal integrierbar (Polarkoordinaten einführen: $d\boldsymbol{x} = r^{n-1} dr ds$).
Für $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|$ hat die Lösung ihren Pol in $\boldsymbol{x}_0$.

Auf Grund unserer Vorüberlegungen versuchen wir, aus (19.5) eine Fundamentallösung zu bekommen durch geeignete Wahl der Konstanten C. Da die Fundamentallösung nur bis auf eine Lösung der homogenen Differentialgleichung festgelegt ist, machen wir für sie den Ansatz

$$\begin{aligned} &\gamma(r) := v(r) + \omega(r), \quad r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|, \\ &v \quad \text{gemäß (19.5)}, \quad \Delta\omega = 0 \text{ in } B, \\ &B \subset \mathbb{R}^n \text{ ein beschränktes Normalgebiet mit } \boldsymbol{x}_0 \in B. \end{aligned} \tag{19.6}$$

Wir untersuchen gemäß (19.3) den Ausdruck $\langle \gamma, \Delta u \rangle = \int\limits_B \gamma \Delta u \; dr$, zunächst für eine Funktion u, später später für eine Testfunktion u, deren Träger in B enthalten ist.

Sei nun $B_\varepsilon = \{\boldsymbol{x} \in B;\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| > \varepsilon\} \subset B$. Wir wenden die 2. Greensche Formel (§ 14) an auf u, γ und das Gebiet $B \setminus B_\varepsilon$. Hinreichende Voraussetzungen hierfür sind $\gamma, u \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$, $\Delta u \in L(B)$, B ein beschränktes Normalgebiet.



Beachte

1. $\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} = -\dfrac{\partial}{\partial r}$ auf $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| = \varepsilon$,
2. das folgende Integral existiert, wenn die Grenzwerte auf der rechten Seite existieren. Die Integrale über B_ε existieren unter den obigen Voraussetzungen.

$$\begin{aligned}
\int\limits_B \gamma(r)\Delta u \, d\boldsymbol{x} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{B_\varepsilon} \gamma(r)\Delta u \, d\boldsymbol{x} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \Bigg[\underbrace{\int\limits_{B_\varepsilon} u\Delta\gamma \, d\boldsymbol{x}}_{=0,\ da\ \Delta\gamma=0} + \int\limits_{\partial B} \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u\frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right) do \ - \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=\varepsilon} \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right) do \Bigg] \\
&= \int\limits_{\partial B} \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u\frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right) do \ - \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=\varepsilon} \left(\gamma\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial \gamma}{\partial r}\right) do. \qquad (19.7)
\end{aligned}$$

Wir untersuchen den Limes-Ausdruck in der letzten Zeile summandenweise.

1. Summand: γ ist lokal integrierbar, $\frac{\partial u}{\partial r}$ ist beschränkt in $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| \leq \varepsilon$. Der Grenzwert des Integrals verschwindet also.

2. Summand: Mit dem Trick: $u(x) = u(x_0) + (u(x) - u(x_0))$ und (19.6) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=\varepsilon} u\frac{\partial \gamma}{\partial r}\, do \overset{(19.6)}{=} \ & u(\boldsymbol{x}_0) \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial r}\, do + \underbrace{u(\boldsymbol{x}_0) \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=\varepsilon} \frac{\partial \omega}{\partial r}\, do}_{\substack{\to 0 \text{ für } \varepsilon\to 0,\\ \text{da Integrand beschr.}}} \\
&+ \underbrace{\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=\varepsilon} (u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}_0))\frac{\partial v}{\partial r}\, do}_{\substack{\to 0 \text{ für } \varepsilon\to 0,\\ \text{da Integrand beschr.}\\ \text{(Polarkoordinaten)}}} + \underbrace{\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=\varepsilon} (u(\boldsymbol{x}) - u(\boldsymbol{x}_0))\frac{\partial \omega}{\partial r}\, do}_{\substack{\to 0 \text{ für } \varepsilon\to 0,\\ \text{da Integrand beschr.}}} .
\end{aligned}$$

Wegen $\dfrac{\partial v}{\partial r} = Cr^{1-n}$ für $n \in \mathbb{N}$, folgt für das verbleibende Integral

$$\int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=\varepsilon} C\varepsilon^{1-n} do = C\varepsilon^{1-n} \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=\varepsilon} do = C\varepsilon^{1-n} \cdot \underbrace{\varepsilon^{n-1} S_n(1)}_{S_n(\varepsilon)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Oberfläche Einheits-} \\ \text{kugel im } \mathbb{R}^n}}{C\ S_n(1)} \quad .$$

Wählen wir also $C = S_n(1)^{-1}$, so folgt aus (19.7):

$$\int\limits_B \gamma(r)\Delta u\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\partial B} \left(\gamma \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u \frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right) do - u(\boldsymbol{x}_0). \tag{19.8}$$

Dies liefert uns „Zwei Fliegen auf einen Schlag“

1. Fliege:
Ist $u = \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und B so groß, daß $\operatorname{Tr}\varphi \subset B$, so folgt aus (19.8) mit dem Ansatz (19.6), da φ und alle Ableitungen auf ∂B verschwinden (mit $C = |S_n(1)|^{-1}$ und $\Delta\omega = 0$)

$$\langle v(r), \Delta\varphi\rangle + \langle \omega(r), \Delta\varphi\rangle = \langle v(r), \Delta\varphi\rangle + \langle \Delta\omega(r), \varphi\rangle \overset{(19.8)}{=} -\varphi(\boldsymbol{x}_0),$$

also
$$-\langle v(r), \Delta\varphi\rangle = \varphi(\boldsymbol{x}_0),$$

d.h. wir haben eine Fundamentallösung gefunden.

Satz 19.3
Für $-\Delta$ wird durch

$$E(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_0) = \begin{cases} \dfrac{r^{2-n}}{(n-2)|S_n(1)|} & , \quad n \neq 2 \\ \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{1}{r} & , \quad n = 2, \quad r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \end{cases}$$

eine lokalintegrierbare, rotationsinvariante Fundamentallösung mit Pol $\boldsymbol{x}_0$ gegeben.

2. Fliege: (direkt ablesbar aus (19.8))

Satz 19.4 Fundamentaltheorem
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Normalgebiet, $\boldsymbol{x}_0 \in B$, $u, \omega \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$, $\Delta\omega = 0$ in B, $\Delta u \in L_1(B)$, $E(r)$ die Fundamentallösung für $-\Delta$ aus Satz 19.3,

$$\gamma(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|) = E(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_0) + \omega(|\boldsymbol{x}|).$$

Dann gilt (mit $\boldsymbol{\nu}$ als der äußeren Normalen von ∂B)

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \int\limits_{\partial B} \left[\gamma(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u(\boldsymbol{x})\frac{\partial \gamma(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right] do - \int\limits_{B} \gamma(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|)\Delta u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Bemerkungen:

1) Der Satz verdankt seinen Namen einerseits der Tatsache, daß er von Fundamentallösungen handelt, andererseits, weil eine Reihe fundamentaler Ergebnisse für den Laplace-Operator aus ihm abgeleitet werden können (vgl. nächster Paragraph).

2) Man hätte die Fundamentallösung auch durch Anwendung der Fouriertransformation herleiten können (vgl. etwa Szmyd § 21.4). Wir werden diesen Weg verfolgen bei der Konstruktion der Fundamentallösung für den Wärmeleitungsoperator.

Anwendung

a) Bestimme das Gravitationspotential einer homogenen Massenbelegung einer Kugel mit Radius R im $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimme die stationäre Wärmeverteilung im $\mathbb{R}^3$ beim Vorhandensein einer Quelle in $|\boldsymbol{x}| \leq R$ mit konstanter, zeitunabhängiger Intensität (räumliches Abklingen: $u = \mathcal{O}(|\boldsymbol{x}|^{-1})$).

Beide Beispiele haben dieselbe mathematische Beschreibung.

Gesucht wird also eine Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \rho \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^3, \ u(\boldsymbol{x}) \stackrel{\boldsymbol{x}\to\infty}{\longrightarrow} 0, \\ \rho(\boldsymbol{x}) &= \begin{cases} \mu_0 & \text{für} \quad |\boldsymbol{x}| \leq R, \\ 0 & \text{für} \quad |\boldsymbol{x}| > R. \end{cases} \end{aligned}$$

Nach Satz 19.2 b) ist $u = \rho * E$, woraus mit E nach Satz 19.3 folgt

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{|\boldsymbol{\xi}| \leq R} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|}\, d\boldsymbol{\xi}.$$

Durch einige Rechnung folgt

$$u(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0}{2}(R^3 - \frac{1}{3}|\boldsymbol{x}|^2), & |\boldsymbol{x}| \leq R, \\ \dfrac{\mu_0 R^3}{3|\boldsymbol{x}|}, & |\boldsymbol{x}| \geq R. \end{cases}$$

Die Fundamentallösung der Wärmeleitungs- (Diffusions-) Gleichung

(vgl. Treves , Triebel)
Gesucht wird eine distributionelle Lösung E zum Pol $(\mathbf{0}, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ von

(19.9) $$\left(\frac{\partial E}{\partial t} - a\Delta_{\boldsymbol{x}} E\right)(\boldsymbol{x}, t) = \delta(\boldsymbol{x})\delta(t) \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \quad a = \text{const.}$$

Bemerkung: $\delta(\boldsymbol{x})\delta(t) = \delta(\boldsymbol{x}, t)$ (direktes Produkt).

Vorgehensweise:
Diese Gleichung ist bzgl. der Zeitvariablen von 1. Ordnung. Daher liegt der Gedanke nahe, die räumlichen Ableitungen 2. Ordnung durch eine Fouriertransformation bzgl. der Ortsvariablen $\boldsymbol{x}$ „zu beseitigen“ und damit (19.9) in eine gewöhnliche Differentialgleichung bzgl. t überzuführen, von der wir eine Lösung suchen, die wir zurücktransformieren.
Wir suchen als Lösung eine temperierte Distribution (sonst ist die Fouriertransformation nicht erklärt). Wir setzen zunächst also voraus (voll guter Hoffnung), daß so eine Lösung existiert und bestätigen im Nachhinein, daß tatsächlich alle notwendigen Voraussetzungen erfüllt sind.
Die Fouriertransformation von u bzgl. $\boldsymbol{x}$ (Bezeichnung: $\tilde{u}$) lautet

$$\tilde{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\boldsymbol{x}\boldsymbol{\xi}} u(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Unter Beachtung von

$$\delta(\boldsymbol{x}, t) = \delta(\boldsymbol{x})\delta(t), \quad \text{(Beispiel zu Satz 17.3 c))},$$
$$\widetilde{\partial_j u}(\boldsymbol{\xi}, t) = i\widetilde{D_j u}(\boldsymbol{\xi}, t) = i\xi_j \tilde{u}(\boldsymbol{\xi}, t), \qquad \text{(vgl. (18.10) und Satz 18.9)},$$
$$\tilde{\delta}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1} \qquad \text{(vgl. (18.20))}$$

erhält man durch Transformation von (19.9)

(19.10) $$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{E}(\boldsymbol{\xi}, t) + a|\boldsymbol{\xi}|^2\, \widetilde{E} = \delta(t).$$

Übung: zur Lösung von (19.10)

Für $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ist bekannt:

Die distributionelle Lösung von $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \delta$ ist $u_1 = H(t) + k$ oder $u_2 = -H(-t) + k$ (vgl. (13.10), S. 88).

1) Zeige: Ist $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, so gilt für die distributionelle Ableitung von $\varphi := v \cdot h$ die Produktregel.

2) Zeige: Für $h = e^{-\alpha t}$ gilt $\delta \cdot h = \delta$.

3) Transformiere die Differentialgleichung $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \delta$ mittels $u = e^{-\alpha t} f$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Welche Differentialgleichung erfüllt f und wie sieht deren Lösung aus?

Die obige Übung liefert als Lösungen von (19.10)

$$
\begin{aligned}
\widetilde{E}_1(\boldsymbol{\xi}, t) &= H(t)e^{-at|\boldsymbol{\xi}|^2} + k_1 e^{-at|\boldsymbol{\xi}|^2} \\
\widetilde{E}_2(\boldsymbol{\xi}, t) &= -H(-t)e^{-at|\boldsymbol{\xi}|^2} + k_2 e^{-at|\boldsymbol{\xi}|^2} \quad \text{mit Konstanten } k_1, k_2.
\end{aligned} \tag{19.11}
$$

Der 2. Term ist jeweils eine Lösung der homogenen Gleichung. Wir wählen $k_i = 0$. Dies ist keine Einschränkung (vgl. die Bemerkung nach Definition 19.1). Dann haben $\widetilde{E}_1$ bzw. $\widetilde{E}_2$ ihren Träger im Halbraum $t \geq 0$ bzw. $t \leq 0$.

Dies gilt auch für die Rücktransformierten, da t von der „Ortstransformation“ nicht betroffen ist. Wir wissen bereits aus Beispielen, daß die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für $t < 0$ nicht sachgemäß ist, und konzentrieren uns deshalb auf den Fall $t \geq 0$. und setzen somit

$$
\widetilde{E}_+(\boldsymbol{\xi}, t) = H(t)e^{-at|\boldsymbol{\xi}|^2}. \tag{19.12}
$$

Für jedes feste t ist dies eine temperierte Distribution bezüglich $\boldsymbol{\xi}$, hat also eine inverse Fouriertransformation. Diese wurde schon in (18.5) berechnet. Ersetzt man dort nämlich a durch $\frac{1}{4at}$, so folgt

$$
F(e^{\frac{-\boldsymbol{x}^2}{4at}})(\boldsymbol{\xi}) = (\sqrt{4at\pi})^n e^{-at\boldsymbol{\xi}^2},
$$

und durch Anwendung von F^{-1}

$$
F_{\boldsymbol{\xi}}^{-1}(e^{-at\boldsymbol{\xi}^2})(\boldsymbol{x}) = (\sqrt{4at\pi})^{-n} e^{\frac{-\boldsymbol{x}^2}{4at}}.
$$

Wendet man auf (19.12) also $F_{\boldsymbol{\xi}}^{-1}$ an, so folgt, (falls $t > 0$)

$$
E_+(\boldsymbol{x}, t) = (2\sqrt{\pi a t})^{-n} H(t) e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4at}}.
$$

Dies ist sogar die inverse Fouriertransformation von $\widetilde{E}_+(\boldsymbol{\xi}, t)$ für alle $t \geq 0$, denn $\widetilde{E}_+(\boldsymbol{\xi}, t)$ ist bzgl. $\boldsymbol{\xi}$ für alle $t \geq 0$ eine temperierte Distribution, hat also als solche eine inverse Fouriertransformation im Raum der temperierten Distributionen, welche durch

$E_+(\boldsymbol{x},t)$ gegeben ist, insbesondere $E_+(\boldsymbol{x},0) = 0 = \widetilde{E}_+(\boldsymbol{\xi},0)$. (Beachte $H(0) = 0$.) Man „sieht leicht", daß $E_+(\boldsymbol{x},t)$ lokal integrierbar ist. Es genügt, die Integrierbarkeit für $M = \{(\boldsymbol{x},t) \in \mathbb{R}^{n+1}\,;\ 0 \le t \le t_0\}$ zu zeigen. Mit Hilfe der Substitution

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{2\sqrt{at}}, \quad d\boldsymbol{y} = \frac{1}{(2\sqrt{a}t)^n} d\boldsymbol{x}$$

folgt

$$\int\limits_M E_+(\boldsymbol{x},t)\ d\boldsymbol{x}dt = \int\limits_0^{t_0} \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4at}}\ d\boldsymbol{x}dt = \int\limits_0^{t_0} \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{y}|^2}\ d\boldsymbol{y}\ dt \overset{(18.4)}{=} t_0.$$

Wir haben uns auf Fundamentallösungen mit Träger in $t \ge 0$ beschränkt, vermerken hier der Vollständigkeit halber aber, daß man eine Fundamentallösung mit Träger in $t \le 0$ erhält, wenn man $H(t)$ durch $-H(-t)$ in E_+ ersetzt (vgl. (19.11)). Von physikalischem Interesse sind jedoch die ersteren. Wir erklären

Definition 19.5
Eine *kausale Fundamentallösung* $E_+(\boldsymbol{x},t)$ für die Wärmeleitungsgleichung ist eine Fundamentallösung, die für $t < 0$ identisch verschwindet:

$$\frac{\partial E_+}{\partial t} - a\Delta_{\boldsymbol{x}} E_+ = \delta(\boldsymbol{x})\delta(t), \quad E_+ \equiv 0 \quad \text{für } t < 0, \ a \in \mathbb{R}.$$

Physikalische Bedeutung: Eine in $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ konzentrierte Quelle entläßt augenblicklich (im Zeitpunkt $t = 0$) eine Einheit „Stoff" (Wärmemenge, Gasmenge). Für $t > 0$ gibt es keine Quellen mehr. $E_+(\boldsymbol{x},t)$ stellt die Wärmeverteilung (Konzentrationsverteilung) im Raumpunkt $\boldsymbol{x}$ zur Zeit t dar, wenn für $t < 0$ $E_+(\boldsymbol{x},t) \equiv 0$ war.

Makabres Beispiel: Atombombe.

Die vorige Rechnung hat nun gezeigt

Satz 19.6
Durch

$$E_+(\boldsymbol{x},t) = H(t)\ \frac{e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4at}}}{(2\sqrt{\pi a t})^n}$$

wird eine lokal integrierbare, kausale, räumlich rotationsinvariante Fundamentallösung für den Wärmeleitungsoperator $\frac{\partial}{\partial t} - a\Delta_{\boldsymbol{x}}$ gegeben.

Bemerkungen

1) Man kann die Differentialgleichung $\frac{\partial E}{\partial t} - a\Delta E = \delta$ auch durch eine volle Fouriertransformation auf die Gestalt $(i\tau + \boldsymbol{\xi}^2)\widehat{E}(\boldsymbol{x},t) = 1$ transformieren und die inverse Transformation der Funktion $\frac{1}{(i\tau+\boldsymbol{\xi}^2)}$ bestimmen. Natürlich erhält man auch so das Ergebnis aus Satz 19.6.

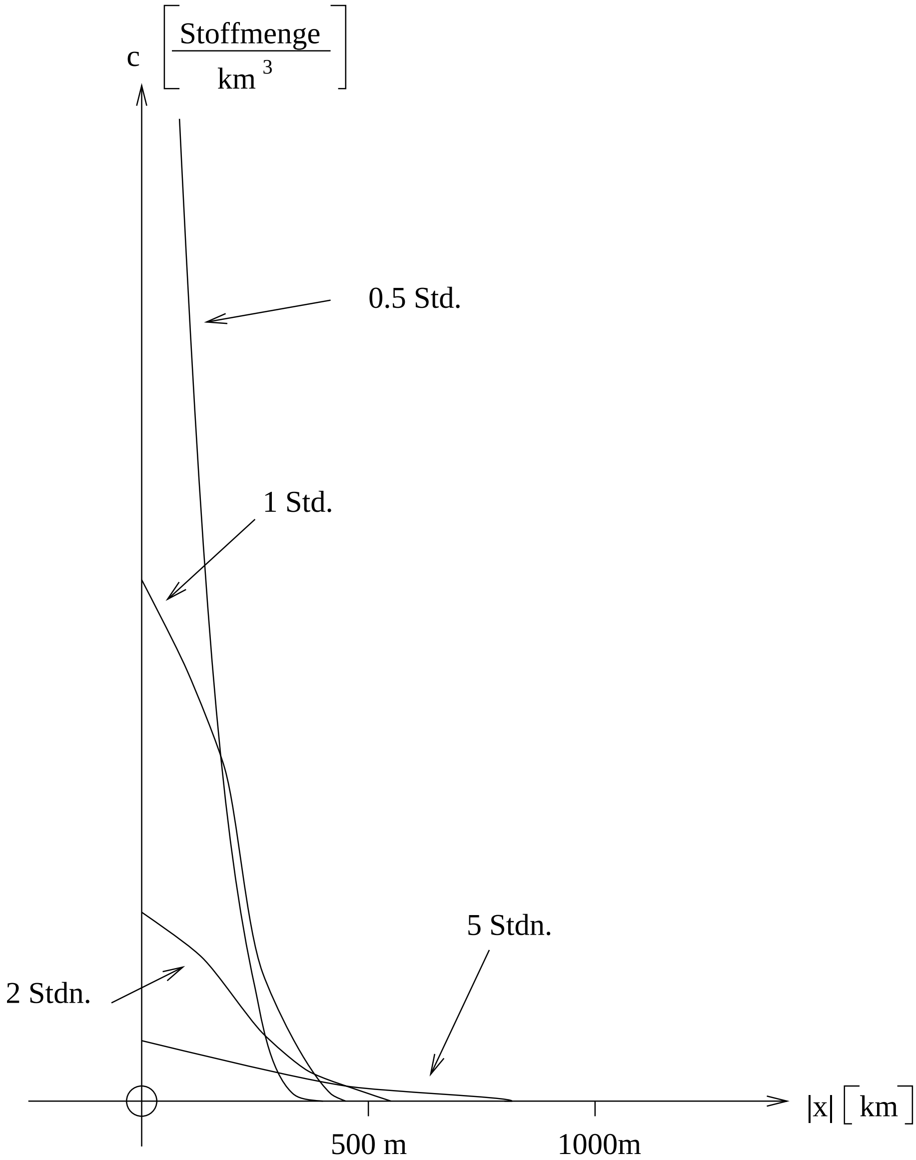
2) Die kausale Fundamentallösung enthält wesentliche Informationen über den Diffusions- bzw. Wärmeleitungsvorgang.

   (a) Die Wärmeausbreitung geht *unendlich schnell* vor sich.

   (b) Praktisch ist sie jedoch endlich, da für große $|\boldsymbol{x}|^2$ der Exponentialterm so klein ausfällt, daß er vernachlässigt werden kann.

3) Die Lösung der Differentialgleichung $\frac{\delta}{\delta t}u - \Delta u = q$ erhält man wieder nach Satz 19.2 (z.B. falls q integrierbar ist und kompakten Träger hat).

Graphische Dastellung von c für einen Diffusionsprozess mit $a = 10^{-2}$ (realistisch) im $\mathbb{R}^3$.



Regularitätsaussagen, Lemma von Weyl

(vgl. Walter: Distributionstheorie)

Neben ihrer physikalischen Bedeutung haben die Fundamentallösungen auch grundlegende Bedeutung für die Glattheitseigenschaften von Lösungen von partiellen Differentialgleichungen, insbesondere für die Laplace- und Wärmeleitungsgleichung. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß die Voraussetzungen des folgenden Satzes für die Fundamentallösung der Wellengleichung nicht erfüllt sind.

Satz 19.7 Verallgemeinertes Weyl'sches Lemma (vgl. Walter 9. VIII)
Sei L ein linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten,
$\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ sei eine lokal integrierbare Fundamentallösung von $L:\ (L[\gamma] = \delta)$.
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Lösung von $Lu = f$ in Ω. Dann gilt

a) $f \in C^\infty(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u \in C^\infty(\Omega)$,

b) $f \in C^q(\Omega), q \geq 0 \quad \Rightarrow \quad u \in C^q(\Omega)$.

Beweis
Wir zeigen: $\forall \boldsymbol{x}_0 \in \Omega\ \exists$ Umgebung $U = U(\boldsymbol{x}_0) : u \in C^\infty(U)$ bzw $C^q(U)$.
Diese lokale Aussage legt folgendes Beweisschema nahe:

Schritt 1) Wir lokalisieren die Differentialgleichung durch Einführen finiter Distributionen (Multiplikation mit geeigneten Testfunktionen).
Schritt 2) Wir verschieben $\boldsymbol{x}_0$ in den Nullpunkt zwecks einfacherer Schreibweise.
Schritt 3) Durch geschickte Faltung (Satz 17.7 + Korollar 17.8) erhält man aus Distributionen Funktionen.

Durchführung:

Schritt 1)

$$\left.\begin{array}{l} \text{sei } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \\ \varphi = 1 \text{ in } U(\boldsymbol{x}_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \bar{u} := u \cdot \varphi \text{ ist finit, } u = \bar{u} \text{ in } U(\boldsymbol{x}_0) \\ L\bar{u} =: \bar{f} \text{ ist finit, } f = \bar{f} \text{ in } U(\boldsymbol{x}_0) \end{array}$$

Bemerkung: Im allgemeinen ist $\bar{f} \neq f\varphi$ (nachprüfen mit Leibnizregel).

Schritt 2)
Setze

$$\left.\begin{array}{lcl} v(\boldsymbol{x}) & := & \bar{u}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0) \\ g(\boldsymbol{x}) & := & \bar{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

g, v sind in einer Umgebung von 0 definiert und finit (da $\bar{u}, \bar{f}$ finit) und $Lv = g$ (dies liegt an den konstanten Koeffizienten von L, sonst greift die Translation auch bei den Koeffizienten)

Schritt 3)

Die Lösung von $Lv = g$ ist nach Satz 19.2 b) gegeben durch

$$v = \gamma * g.$$

$v = \gamma * g$ wird geschickt zerlegt.

Sei $K_r := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| < r\}$. Wähle $r > 0$ so, daß $K_{4r} + \boldsymbol{x}_0 \subset U(\boldsymbol{x}_0)$.

Dann gilt in K_{4r}: $\quad g(\boldsymbol{x}) = \bar{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0)$,

und wir zeigen: $\quad v \in C^\infty(K_r)$ bzw. $\in C^q(K_r)$,

woraus folgt $\quad u \in C^\infty(K_r + \boldsymbol{x}_0)$ bzw. $C^q(K_r + \boldsymbol{x}_0)$.

$$\text{Seien } \alpha, \beta \in \mathcal{D}: \quad \begin{array}{rcl} \alpha & = & 1 \text{ in } K_r, \quad \operatorname{Tr}\alpha \subset K_{2r}, \\ \beta & = & 1 \text{ in } K_{3r}, \quad \operatorname{Tr}\beta \subset K_{4r}. \end{array}$$

Damit zerlegen wir (Nachrechnen):

$$\begin{array}{rcccccc} v = \gamma * g & = & \gamma * \beta g & + & (1-\alpha)\gamma * (1-\beta)g & + & \alpha\gamma * (1-\beta)g \\ & = & v_1 & + & v_2 & + & v_3. \end{array}$$

Es ist

$$v_2 \in C^\infty, \quad \text{denn} \quad \left.\begin{array}{l} (1-\alpha)\cdot\gamma \in C^\infty \\ (1-\beta)g \quad \text{finit} \end{array}\right\} \overset{\text{Korollar 17.8}}{\Longrightarrow} \quad v_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

$v_3 = 0$ in K_r, denn wegen $\operatorname{Tr} v_3 \subset \operatorname{Tr}\alpha\gamma + \operatorname{Tr}(1-\beta)g$ (Satz 17.5 c) und

$$\left.\begin{array}{lcl} \boldsymbol{x} \in \operatorname{Tr}\alpha\gamma & \Rightarrow & |\boldsymbol{x}| < 2r \ \text{(Def. von } \alpha) \\ \boldsymbol{y} \in \operatorname{Tr}(1-\beta)g & \Rightarrow & |\boldsymbol{y}| > 3r \ \text{(Def. von } \beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \geq ||\boldsymbol{y}| - |\boldsymbol{x}|| > r, \\ \text{also } v_3 = 0 \text{ in } K_r. \end{array}$$

Fall a) $f \in \mathbb{C}^\infty :\Rightarrow g \in C_0^\infty \Rightarrow v_1 \in C^\infty$, denn

$$\left.\begin{array}{r} \gamma \in \mathcal{D}', \ \beta g \in \mathcal{D}(K_{4r}) \\ \text{Def. von } \beta \text{ und } g(\boldsymbol{x}) = \bar{f}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0) \text{ in } K_{4r} \end{array}\right\} \overset{\text{Satz 17.7}}{\Longrightarrow} \quad v_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Fall b) $f \in C^q :\Rightarrow g \in C^q \Rightarrow v_1 \in C^q$, denn
wegen $\gamma \in L(|\boldsymbol{x}| < 1)$, ist γ regulär. Mit $h := \beta g \in C_0^q(K_{4r})$
existieren (vgl. Satz 17.6)
$v_1 = \gamma * h = \int \gamma(\boldsymbol{\xi}) h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}$ und $\partial^\alpha v_1(\boldsymbol{x}) = \int \gamma(\boldsymbol{\xi}) \partial^\alpha_{\boldsymbol{x}} h(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}$.

Die Ableitungsordnung von h überträgt sich auf v_1 und man erhält also insgesamt $v_1 \in C^q(K_{4r})$. ■

Als unmittelbare Folgerung haben wir damit den

Satz 19.8
Jede Lösung u von $\Delta u = 0$ oder $u_t = \Delta u$ in einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ erfüllt

$$u \in C^\infty(\Omega).$$

Beweis: Die jeweiligen Fundamentallösungen erfüllen die Voraussetzungen des vorigen Satzes mit $f \equiv 0$. ■

Bemerkung: Fundamentallösungen, welche die Bedingungen von Satz 19.7 erfüllen, kann man für sogenannte hypoelliptische Differentialoperatoren (dazu gehören elliptische und parabolische) konstruieren (siehe dazu Hörmander I-IV und Treves: Lin. PDE with const. coefficients).

Die Fundamentallösung für den Wellenoperator

(vgl. Treves, Triebel, Szmydt)

Gesucht wird eine Lösung E von

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E - c^2\Delta_{\boldsymbol{x}}E = \delta(\boldsymbol{x})\delta(t), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{19.13}$$

Von physikalischem Interesse ist wieder insbesondere die kausale Fundamentallösung .

Definition 19.9
Eine *kausale Fundamentallösung für den Wellenoperator* ist eine Fundamentallösung, die für $t < 0$ verschwindet:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_+ - c^2\Delta_{\boldsymbol{x}}E_+ = \delta(\boldsymbol{x})\delta(t), \quad E_+ \equiv 0 \quad \text{für } t < 0,\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{19.14}$$

E_+ bezeichnet die kausale Fundamentallösung: „ + “ bedeutet: Träger in $t \geq 0$.

Physikalische Bedeutung: Aussendung eines Signals im Punkt $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ (vgl.dazu §21, insbesondere die Bemerkungen nach Satz 21.5).

Wir werden jedoch wiederum die Fundamentallösungen, die ihren Träger auch in $t \leq 0$ haben, nicht ganz außer Acht lassen, denn erstens ist dies zum Verständnis der distributionellen Lösung der AWA für $\Box u = f$ wichtig, und zweitens ist die Wellengleichung auch in die Vergangenheit zu rechnen.

Wieder liegt es nahe, die distributionelle Differentialgleichung (19.13) durch eine partielle Fouriertransformation bezüglich $\boldsymbol{x}$ (Bezeichnung: $F_{\boldsymbol{x}}u = \tilde{u}$) in eine gewöhnliche Differentialgleichung bezüglich der Zeit t für die Transformierten überzuführen, und wieder hoffen wir, daß eine Lösung in $\mathcal{S}'$ existiert, damit die Fouriertransformation durchführbar ist. Wir erhalten

$$\partial_t^2\widetilde{E} + c^2|\boldsymbol{\xi}|^2\widetilde{E} = \delta(t) \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{\xi}} = \delta(t), \qquad (\widetilde{E} = F_{\boldsymbol{x}}E). \tag{19.15}$$

Wir lösen diese Gleichung für festes $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ nach der Methode der Variation der Konstanten (vgl. z.B. Bronstein-Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik). Die Methode

ist auch auf unsere distributionelle Differentialgleichung anwendbar, da nur Produkte von Distributionen und langsam wachsenden Funktionen auftreten, für welche die Produkregel der Differentiation gilt.
Die homogene Gleichung (19.15) hat die allgemeine Lösung

$$\widetilde{E}(\boldsymbol{x}, t) = A \sin ct|\boldsymbol{\xi}| + B \cos ct|\boldsymbol{\xi}|, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Betrachtet man A, B als Funktionen bzw. Distributionen bzgl. t, so liefert die Methode für A', B' ($\hat{=}$ disributionelle Ableitungen von A, B) das lineare Gleichungssystem

$$A' = \frac{\delta(t) \cos ct|\boldsymbol{\xi}|}{c|\boldsymbol{\xi}|} = \frac{\delta(t)}{c|\boldsymbol{\xi}|}, \qquad B' = -\frac{\delta(t) \sin ct|\boldsymbol{\xi}|}{c|\boldsymbol{\xi}|} = 0,$$

Beachte dazu z.B.: $\langle \delta(t) \cos ct|\boldsymbol{\xi}|, \varphi \rangle = \langle \delta(t), (\cos ct|\boldsymbol{\xi}|)\, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta(t), \varphi \rangle$.
Durch Integration folgt (Integrationskonstanten $= 0$ setzen, man sucht nur eine partielle Lösung)

$$A_1 = \frac{H(t)}{c|\boldsymbol{\xi}|} \quad \text{oder} \quad A_2 = -\frac{H(-t)}{c|\boldsymbol{\xi}|}, \quad B = 0.$$

Man erhält somit die Lösungen

$$\widetilde{E}_+(\boldsymbol{x}, t) = \frac{H(t) \sin ct|\boldsymbol{\xi}|}{c|\boldsymbol{\xi}|}, \tag{19.16}$$

$$\widetilde{E}_-(\boldsymbol{x}, t) = -\frac{H(-t) \sin ct|\boldsymbol{\xi}|}{c|\boldsymbol{\xi}|}, \tag{19.17}$$

deren Träger in $t \geq 0$ bzw $t \leq 0$ liegen.

Daß dies tatsächlich Lösungen von (19.15) sind, rechnet man schnell nach. Eine ausführlichere Behandlung gewöhnlicher distributioneller Differentialgleichungen findet man in Treves, Chapter I, Section 7.
Wir lenken im weiteren wieder unser Hauptaugenmerk auf E_+. Wir müssen die Rücktransformation bzgl. $\boldsymbol{\xi}$ berechnen und setzen daher

$$\omega^{\{t\}}(\boldsymbol{\xi}) := \frac{\sin ct|\boldsymbol{\xi}|}{c|\boldsymbol{\xi}|}. \tag{19.18}$$

Dies ist eine vom Parameter t abhängige Distribution, die bzgl. $\boldsymbol{\xi}$ wirkt.

Man nennt $t \to \omega^{\{t\}}$ eine *distributionswertige Funktion.*

Offensichtlich ist $\omega^{\{t\}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, besitzt also eine inverse Fouriertransformation bzgl.

$\boldsymbol{\xi}$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, und es gilt für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\begin{aligned}
\langle E_+, \varphi\rangle = \left\langle F_{\boldsymbol{\xi}}^{-1}\widetilde{E}_+, \varphi\right\rangle &= \left\langle \widetilde{E}_+, F_{\boldsymbol{x}}^{-1}\varphi\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} H(t)\,\omega^{\{t\}}(\boldsymbol{\xi})\,(F_{\boldsymbol{x}}^{-1}\varphi)(\boldsymbol{\xi},t)\,d\boldsymbol{\xi}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(t)\left\langle \omega^{\{t\}}(\boldsymbol{\xi}), F_{\boldsymbol{x}}^{-1}\varphi\right\rangle\,dt \\
&= \int_0^{\infty} \left\langle \omega^{\{t\}}, F_{\boldsymbol{x}}^{-1}\varphi\right\rangle\,dt \\
&= \int_0^{\infty} \left\langle F_{\boldsymbol{\xi}}^{-1}\omega^{\{t\}}, \varphi\right\rangle\,dt. \qquad (19.19)
\end{aligned}$$

Beachte: $\omega^{\{t\}}$ wirkt als Distribution bzgl. ξ, $F_{\boldsymbol{\xi}}^{-1}\omega^{\{t\}}$ wirkt also als Distribution nur bzgl. $\boldsymbol{x}$ auf die Testfunktion $\varphi \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, t)$.

Um die Fundamentallösungen für die Raumdimensionen $n = 1, 2, 3$ (und gegebenfalls auch für $n > 3$) zu erhalten, muß $F_{\xi}^{-1}\omega^{\{t\}}$ für diese Dimensionen bestimmt werden.

Diese Aufgabe ist dimensionsabhängig.

n = 1:

$$\begin{aligned}
\omega^{\{t\}}(\xi) &= \frac{\sin ct|\xi|}{c|\xi|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sin ungerade}}}{=} \frac{\sin ct\xi}{c\xi} = \frac{1}{c\xi}\,\frac{e^{ict\xi} - e^{-ict\xi}}{2i} = \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} e^{i\xi x}\,dx \\
&\overset{x\to -x}{=} -\frac{1}{2c}\int_{ct}^{-ct} e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} e^{-ix\xi}\,dx = \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct} (\operatorname{sgn} t)e^{-ix\xi}\,dx \\
&= \frac{\operatorname{sgn} t}{2c}\int \underbrace{H(c|t| - |x|)}_{=0 \text{ für } c|t|-|x|\le 0} e^{-ix\xi}\,dx = \frac{\operatorname{sgn} t}{2c} F_x(H(c|t| - |x|))(\xi, t).
\end{aligned}$$

Beachte: $c|t| - |x| \le 0$ ist äquivalent zu $x \ge c|t|$ und $-x \ge c|t|$. Damit folgt nach dem Umkehrsatz

$$F_{\xi}^{-1}(\omega^{\{t\}}(\xi))(x) = \frac{\operatorname{sgn} t}{2c} H(c|t| - |x|). \qquad (19.20)$$

Einsetzen in (19.19) liefert ($\operatorname{sgn} t$ verschwindet wegen $\int_0^{\infty}$ und $|t|$ kann deshalb durch

t ersetzt werden)

$$\begin{aligned}\left\langle F_\xi^{-1}\widetilde{E}_+,\varphi\right\rangle &= \frac{1}{2c}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}} H(ct-|x|)\varphi(x,t)dxdt\\ &= \frac{1}{2c}\int\limits_{-\infty}^\infty\int\limits_{\mathbb{R}} H(ct-|x|)\varphi(x,t)dxdt, \quad \text{Integrand} = 0 \text{ für } t<0\\ &= \left\langle \frac{1}{2c}H(ct-|x|),\varphi(x,t)\right\rangle,\end{aligned}$$

also

(19.21) $$E_+(x,t) = \frac{1}{2c}H(ct-|x|) \quad \text{für } n=1.$$

$\mathbf{n=3}$

Wir haben bereits bewiesen (distributionelle Schreibweise von (18.23) und (18.21)):

$$\left\langle F^{-1}\Big(\frac{\sin R|\boldsymbol{\xi}|}{|\boldsymbol{\xi}|}\Big),\varphi(\boldsymbol{x})\right\rangle = \frac{1}{4\pi R}\int\limits_{|\boldsymbol{x}|=R}\varphi(\boldsymbol{x})\ ds_R, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3.$$

Wir setzen $R=ct$ und dividieren durch c. Mit der Substitution

(*) $$\boldsymbol{x} = ct\boldsymbol{y},\ ds_{\boldsymbol{x}} = c^2t^2\,ds_{\boldsymbol{y}}$$

ergibt dies

$$\left\langle F_{\boldsymbol{\xi}}^{-1}\omega^{\{t\}},\varphi(\boldsymbol{x})\right\rangle = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{|\boldsymbol{x}|=ct}\varphi(\boldsymbol{x})\ ds_{\boldsymbol{x}} = \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\boldsymbol{y}|=1}\varphi(ct\boldsymbol{y})\ ds_{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{4\pi R}\left\langle V_R,\varphi(\boldsymbol{x})\right\rangle.$$

Durch Einsetzen in (19.19) folgt für $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n+1})$, $n=3$, indem wir die Substitution (*) rückgängig machen

(19.22) $$\langle E_+,\varphi\rangle = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^\infty t\int\limits_{|\boldsymbol{y}|=1}\varphi(ct\boldsymbol{y},t)\ ds_{\boldsymbol{y}}dt = \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\int\limits_{|\boldsymbol{x}|=ct}\varphi(\boldsymbol{x},t)\ ds_{\boldsymbol{x}}dt.$$

Mit der Bezeichnung (vgl. (13.5), „a standard abuse of notation“)

$$\langle\delta(|\boldsymbol{x}|-ct),\varphi\rangle \ = \ \langle\delta(ct-|\boldsymbol{x}|),\varphi\rangle = \ = \int\limits_{S_r}\varphi(\boldsymbol{x})\ ds_{\boldsymbol{x}}$$

kann man dieses Ergebnis auch schreiben als

$$E_+ = \frac{1}{4\pi c^2}\,\frac{\delta(ct-|\boldsymbol{x}|)}{t}$$

(dies impliziert stillschweigend $t \geq 0$, weil in (19.22) nur über $t \geq 0$ integriert wird).

Beachte: Im Fall $n = 3$ (Raumdimension) ist E_+ eine singuläre Distribution mit $\operatorname{Tr} E_+ = \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^4;\ t \geq 0,\ |\boldsymbol{x}| = ct\}$.

$\mathbf{n = 2}$
Wir berechnen die kausale Fundamentallösung $E_{+,2}$ im $\mathbb{R}^2$ aus der kausalen Fundamentallösung $E_{+,3}$ (vgl. (19.22)) mit Hilfe der

Abstiegsmethode (Hadamard)

(z.B. Triebel, Satz 14.8)

Idee: Eine Lösung der 3D Wellengleichung, die von x_3 nicht abhängt, ist eine Lösung der 2D Wellengleichung. Dies wollen wir auf distributioneller Ebene nachvollziehen.

Die Definitionsgleichung der Fundamentallösung für $\Box_{c,3} E_{+,3} = \delta$ mit

$$\Box_{c,3} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

war für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ gegeben durch (vgl. (19.22) und beachte: $\Box_{c,3}\varphi \in \mathcal{S}$)

$$(19.23) \quad \varphi(\mathbf{0}) = \langle \Box_{c,3} E_{+,3}, \varphi \rangle = \langle E_{+,3}, \Box_{c,3}\varphi \rangle \overset{(19.22)}{=} \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{|\boldsymbol{x}|=ct} \Box_{c,3}\varphi(\boldsymbol{x}, t)\, ds_{\boldsymbol{x}} dt.$$

Wir „blenden x_3 aus“ durch spezielle Wahl von φ. Mit

$$\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \eta(\rho) = 1 \text{ für } |\rho| \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$$

setzen wir

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) := \psi(x_1, x_2, t)\ \eta\left(\frac{x_3}{k}\right)$$

Dann erhalten wir

$$\psi(0,0,0)\underbrace{\eta(0)}_{=1} = \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{|\boldsymbol{x}|=ct} \Box_{c,3} \left(\psi(x_1, x_2, t)\ \eta\left(\frac{x_3}{k}\right)\right)\, ds_{\boldsymbol{x}} dt.$$

Läßt man hier $k \to \infty$ gehen, so folgt

$$\psi(0,0,0) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{|\boldsymbol{x}|=ct} \Box_{c,2}\psi(x_1, x_2, t)\, ds_{\boldsymbol{x}} dt \text{ mit } |\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Dies bedeutet: Die Fundamentallösung zu $\Box_{c,2}$ wird gegeben durch

$$(19.24) \qquad \langle E_{+,2}, \psi \rangle = \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{|\boldsymbol{x}|=ct} \psi(x_1, x_2, t)\; ds_{\boldsymbol{x}} dt, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,,$$

denn durch Ausrechnen von (19.24) zeigen wir gleich, daß durch diese Darstellung eine reguläre Distribution erklärt ist. Mit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ ist auch $\Box_{c,2}\psi(x_1, x_2, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ und laut (19.24) gilt

$$\langle E_{+,2}, \Box_{c,2}\psi \rangle = \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{|\boldsymbol{x}|=ct} \Box_{c,2}\psi(x_1, x_2, t)\; ds_{\boldsymbol{x}} dt, \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Nach voriger Rechnung ist

$$< \Box_{c,2} E_{+2}, \psi > = < E_{+,2}, \Box_{c,2}\psi > = \psi(0,0,0),$$

also ist durch (19.24) die Fundamentallösung erklärt.

Wir berechnen eine Darstellung für $E_{+,2}$, indem wir zunächst das innere Integral in (19.24) in euklidischen Koordinaten ausrechnen.
Eine Parameterdarstellung für die obere und untere Halbsphäre S^+ bzw. S^- von $|\boldsymbol{x}| = ct$ wird gegeben durch

$$F^\pm(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x_3 = \pm\sqrt{(ct)^2 - (x_1^2 + x_2^2)} \quad \text{für} \quad S^\pm$$
$$\text{für den Parameterbereich } x_1^2 + x_2^2 \le (ct)^2.$$

Das Oberflächenelement der Sphäre lautet

$$\begin{aligned} ds_{\boldsymbol{x}} &= \left| \frac{\partial F}{\partial x_1} \times \frac{\partial F}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2}\, dx_1 dx_2 \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2}\, dx_1 dx_2 = \frac{|\boldsymbol{x}|}{|x_3|}\; dx_1 dx_2 = \frac{|ct|}{|x_3|}\; dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Der Integrand des inneren Integrals von (19.24) ist von x_3 unabhängig. Deshalb liefern die Integrale über die obere und untere Halbsphäre den gleichen Beitrag, also

$$\int_{|\boldsymbol{x}|=|ct|} = \int_{S^+} + \int_{S^-} = 2 \int_{S^+} .$$

Damit erhält man für das Gesamtintegral (19.24)

$$
\begin{aligned}
< E_{+,2}, \psi > &= \frac{1}{2\pi c^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{x_1^2+x_2^2 \le |ct|^2} \frac{\psi(x_1,x_2,t)|ct|}{|x_3|}\, dx_1 dx_2 dt \\
(19.25) \qquad &= \frac{1}{2\pi c} \int_0^\infty \int_{\sqrt{x_1^2+x_2^2} \le |ct|} \frac{\psi(x_1,x_2,t)}{|x_3|}\, dx_1 dx_2 dt \\
&\quad \text{wegen } H(ct - \sqrt{x_1^2+x_2^2}) = 0 \text{ falls } t \le 0 \text{ oder } ct \le \sqrt{x_1^2+x_2^2} \text{ folgt} \\
&= \frac{1}{2\pi c} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{H(ct - \sqrt{x_1^2+x_2^2})}{\sqrt{(ct)^2 - (x_1^2+x_2^2)}} \psi(x_1,x_2,t)\, dx_1 dx_2 dt \\
&= \left\langle \frac{H(ct - |\boldsymbol{x}|)}{2\pi c\sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{x}|^2}}, \psi(x_1,x_2,t) \right\rangle \quad \text{mit} \quad |\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}\,.
\end{aligned}
$$

$E_{+,2}$ ist lokal integrierbar, wenn für jede Testfunktion $\psi(x_1,x_2,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ mit $\psi = 1$ in einer beschränkten Menge (und bequemlichkeitshalber $0 \le \psi(x_1,x_2,t) \le 1$) gezeigt wird, daß $| < E_{+,2}, \psi > |$ beschränkt ist. Aus (19.25) folgt

$$
\begin{aligned}
| < E_{+,2}, \psi > | &\le \frac{1}{2\pi c} \int_0^\infty \int_{\sqrt{x_1^2+x_2^2} \le |ct|} \frac{|\psi(x_1,x_2,t)|}{|x_3|}\, dx_1 dx_2 dt, \\
&\quad \text{und da } \psi \in \mathcal{D},\ 0 \le \psi(x_1,x_2,t) \le 1 \text{ mit einem } T < \infty \\
&\le \frac{1}{2\pi c} \int_0^T \int_{\sqrt{x_1^2+x_2^2} \le |ct|} \frac{1}{|x_3|}\, dx_1 dx_2 dt, \\
&\quad \text{Einführung von Polarkoordinaten bzl.} x_1, x_2,\ R := ct \text{ und } r^2 = x_1^2 + x_2^2 \\
&= \frac{1}{2\pi c} \int_0^T \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, dr d\varphi dt, \\
&\le \frac{1}{c} \int_0^T \int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, dr dt \ \text{ mit } z = R^2 - r^2,\ dz = -2rdr \\
&\le \frac{1}{2} \int_0^T \int_{-R^2}^0 \frac{-1}{\sqrt{z}}\, dz dt < \infty
\end{aligned}
$$

Zusammenfassend $(n = 1, 2, 3)$ haben wir somit

Satz 19.10 Fundamentallösungen für $\square_c = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \Delta_{\boldsymbol{x}}$
Kausale, räumlich rotationsinvariante Fundamentallösungen für den Wellenoperator werden gegeben durch

$$E_+(\boldsymbol{x}, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2c} H(ct - |\boldsymbol{x}|) & \text{für } x \in \mathbb{R} \quad (\in L_{loc}(\mathbb{R}^2)), \\ \dfrac{1}{2\pi c} \dfrac{H(ct - |\boldsymbol{x}|)}{\sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{x}|^2}} & \text{für } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (\in L_{loc}(\mathbb{R}^3)), \\ \dfrac{1}{4\pi c^2} \dfrac{\delta(ct - |\boldsymbol{x}|)}{t} & \text{für } \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{singulär}), \end{cases}$$

wobei letzteres bedeutet

$$< E_{+,3}, \varphi >= \frac{1}{4\pi c^2} \int\limits_0^\infty \frac{1}{t} \int\limits_{|\boldsymbol{x}|=ct} \varphi(\boldsymbol{x}, t)\ ds_{\boldsymbol{x}} dt \quad \text{für} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Analoge Darstellungen erhält man für E_- .

Physikalische Bedeutung:

$n = 1$**:** Eine „räumlich und zeitlich punktuelle“ Erregung in $\boldsymbol{x} = 0$, $t = 0$ einer unendlich langen Saite ist zum Zeitpunkt t im Intervall $|\boldsymbol{x}| \le ct$ vorhanden und klingt nicht ab.

$n = 2$**:** Eine punktuelle Erregung (Stein ins Wasser) hat sich bis zum Zeitpunkt t auf den Kreis $|\boldsymbol{x}| \le ct$ ausgebreitet und klingt in einem Punkt $|\boldsymbol{x}|$ zeitlich mit $\approx \frac{1}{t}$ ab (Wasserwellen).

$n = 3$**:** Zum Zeitpunkt t ist der Träger einer punktuellen Erregung die Kugeloberfläche $|\boldsymbol{x}| = ct$. Nur zum Zeitpunkt $\tilde{t}$ ist in einem Punkt der Sphäre $|\boldsymbol{x}| = c\tilde{t}$ eine Erregung wahrzunehmen. Vorher und nachher herrscht „Stille“, d.h. Signale breiten sich scharf aus. Man kann diese Ergebnisse verallgemeinern zum **Huygens’schen Prinzip**: Für $n \ge 3$ gilt: Genau in Räumen mit ungerader Dimension breiten sich Signale scharf aus.

Danach leben wir in „der besten aller Welten“, nämlich in der Welt kleinster Dimension, in der sich Signale scharf ausbreiten. Man stelle sich vor: „Das Geräusch eines Paukenschlags würde in einem Punkt dauernd zu hören sein.“ Wir kommen auf dieses Phänomen bei der Lösung der AWA zurück.

§ 20 (Ein bißchen) Potentialtheorie

Mittelwertsatz von Gauß, starkes Minimaxprinzip

Wir zitieren nochmals das Fundamentaltheorem (Satz 19.4), aus dem wir Folgerungen ziehen (vgl. Walter: Einführung in die Potentialtheorie):

Satz 19.4 Fundamentaltheorem
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Normalgebiet, $\boldsymbol{x}_0 \in B$, $u, \omega \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$, $\Delta\omega = 0$ in B, $\Delta u \in L_1(B)$, $E(r)$ die Fundamentallösung für $-\Delta$ aus Satz 19.3,

$$\gamma(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|) = E(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_0) + \omega(\boldsymbol{x}).$$

Dann gilt (mit $\boldsymbol{\nu}$ als der äußeren Normalen von ∂B)
(20.1)
$$u(\boldsymbol{x}_0) = \int\limits_{\partial B} \left[\gamma(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|)\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} - u(\boldsymbol{x})\frac{\partial\gamma(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right]\, ds - \int\limits_B \gamma(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|)\Delta u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Hieraus folgt sofort

Satz 20.1 Mittelwertsatz von Gauß
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C^2(B)$ harmonisch in B, d.h. $-\Delta u = 0$ in B.
Dann gilt für jede in B enthaltene Kugel $\bar{K}_R = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0| \le R\}$:

(20.2)
$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{S_n(R)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=R} u(\boldsymbol{x})\, ds,$$
$$S_n(R) \ \hat{=}\ \text{Oberfläche der Kugel vom Radius } R \text{ in } \mathbb{R}^n,$$

und

(20.3)
$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{V_n(R)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\le R} u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x},$$
$$V_n(R) \ \hat{=}\ \text{Volumen der Kugel vom Radius } R \text{ in } \mathbb{R}^n.$$

Ist $B = K_R$ (offene Kugel), so muß für die Gültigkeit von (20.2) und (20.3) gefordert werden: $u \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$, $\Delta u \in L_1(B)$.

Beweis (20.2)
Ist $\bar{K}_R \subset B$, so ist $u \in C^2(\bar{K}_R)$, wir können Satz 19.4 anwenden auf K_R mit $\omega \equiv 0$ und erhalten mit der Funktion E aus Satz 19.3 (beachte: $E(R), E'(R)$ sind konstant auf ∂K_R)

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{x}_0) &= E(R) \underbrace{\int\limits_{\partial K_R} \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\, ds}_{\substack{=0 \\ \text{2. Greensche Formel mit} \\ v\equiv 1, \Delta u = 0 \text{ (Satz 3.10)}}} - E'(R) \int\limits_{\partial K_R} u(\boldsymbol{x}) ds - \int\limits_{K_R} E(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_0) \underbrace{\Delta u(\boldsymbol{x})}_{=0}\, d\boldsymbol{x} \\
&= -\, E'(R) \int\limits_{\partial K_R} u(\boldsymbol{x})\, ds \\
&\quad \text{und da } E'(R) = -\frac{R^{1-n}}{S_n(1)} = \frac{-1}{S_n(R)} \\
&= \frac{1}{S_n(R)} \int\limits_{\partial K_R} u(\boldsymbol{x})\, ds \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Beweis (20.3) folgt aus (20.2) durch Integration. Mit

$$S_n(r) = r^{n-1} S_n(1), \quad V_n(r) = \frac{r}{n} S_n(r)$$

erhalten wir aus (20.2) nach Multiplikation mit r und Integration über r

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{x}_0) \int\limits_0^R r^{n-1}\, dr &= \int\limits_0^R u(\boldsymbol{x}_0) r^{n-1}\, dr = \int\limits_0^R r^{n-1} \underbrace{\frac{1}{S_n(r)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=r} u(\boldsymbol{x})\, ds}_{u(\boldsymbol{x}_0)}\, dr \\
&= \frac{1}{S_n(1)} \int\limits_0^R \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|=r} u(\boldsymbol{x})\, ds dr = \frac{1}{S_n(1)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\le R} u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x},
\end{aligned}
$$

also

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{n}{R^n S_n(1)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\le R} u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \frac{1}{V_n(R)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|\le R} u(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

Im Fall $B = K_R$ benötigt man die verschärften Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für die Anwendung von Satz 19.4. ■

Korollar 20.2
Unter den Voraussetzungen von Satz 20.1 gilt:

u $\begin{matrix}\text{sub-}\\\text{super-}\end{matrix}$ harmonisch in B, d.h. $-\Delta u \;\begin{matrix}\le\\\ge\end{matrix}\; 0 \Rightarrow (20.2), (20.3)$ gelten mit $\begin{matrix}\le\\\ge\end{matrix}$ statt $=$.

Bemerkung: Eine stationäre Temperaturverteilung ist super-(sub-)harmonisch, falls nur Quellen (Senken) vorhanden sind.

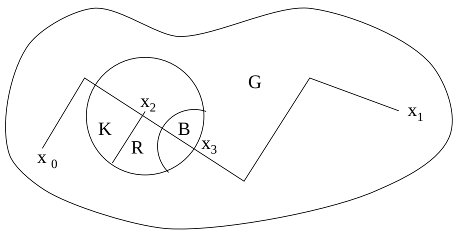
Beweis Korollar 20.2: Übung (Hinweis: Greensche Formel für u und $v = 1$, damit in (20.1) und Vorzeichen von E beachten). ■

Eine weitere wichtige Folgerung aus dem Mittelwertsatz ist das

Korollar 20.3 Starkes Minimum-Maximum Prinzip
Sei u harmonisch in einem zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, $u \neq \text{const.}$ in G. Dann besitzt u höchstens auf dem Rand von G, also in keinem *inneren* Punkt von G, ein Maximum oder Minimum.

Beachte: Ist $u \in C^2(G) \cap C(\bar{G})$ und G beschränkt, so werden nach dem schwachen Minimax-Prinzip (Satz 6.2) zusammen mit diesem Korollar Minimum und Maximum nur auf dem Rand angenommen.
Ist jedoch z.B. u auf ∂G nicht stetig oder ∂G nicht beschränkt, so muß u auf ∂G kein Maximum oder Minimum haben, nicht einmal ein inf oder sup.

Beweis: Wir beweisen das Korollar indirekt.
Annahme: $\exists \boldsymbol{x}_0 \in G : u(\boldsymbol{x}_0) = A = \max_G u \quad \Rightarrow \quad \exists\, \boldsymbol{x}_1 \in G : \quad u(\boldsymbol{x}_1) < A$, da $u \neq \text{const}$.
Da G zusammenhängend ist, existiert ein Streckenzug von $\boldsymbol{x}_1$ nach $\boldsymbol{x}_0$. Sei $\boldsymbol{x}_2$ darauf der 1. Punkt (von $\boldsymbol{x}_1$ kommend) mit $u(\boldsymbol{x}_2) = A$.



Wähle $R > 0$ so klein, daß $K = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_2| \leq R\} \subset G$. Dann ist $u(\boldsymbol{x}_3) < A$ (vgl. Zeichnung) und $u < A$ in einer Kugelumgebung $\tilde{K} \subset G$ um $\boldsymbol{x}_3$. Sei $B = \tilde{K} \cap K$.

Auf K wird (20.2) oder (20.3) angewandt. Dann erhält man einen Widerspruch aus

$$A = u(\boldsymbol{x}_2) = \frac{1}{V_n(R)} \left[\int_B \underbrace{u(\boldsymbol{x})}_{\leq A}\ d\boldsymbol{x} + \int_{K\setminus B} \underbrace{u(\boldsymbol{x})}_{<A}\ d\boldsymbol{x} \right] < \frac{A}{V_n(R)} \underbrace{\left[\int_B d\boldsymbol{x} + \int_{K\setminus B} d\boldsymbol{x} \right]}_{=V_n(R)} = A.$$

■

Anwendung:
1) Positivität der Greenfunkiton (vgl. Lemma 20.7)
2) Eindeutigkeit der 1. Randwertaufgabe für $\Delta u = f$ (vgl. Folgerung 6.3).

Greenfunktion und Dirichletproblem

Ideen zur Lösung für das

(innere) Dirichletproblem für die Poisson-Gleichung (RWA 1. Art, vgl. (3.28))

$$(20.4)\qquad \begin{array}{lll} -\Delta u = f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in B, & B \text{ Normalgebiet} \subset \mathbb{R}^n, \\ u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \partial B, & g \in C(\partial B). \end{array}$$

Ist u eine Lösung von (20.4) mit $u \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$, also $g \in C^1(\partial B)$, $\Delta u \in L(B)$, also $f \in L(B)$, so folgt aus dem Fundamentaltheorem (Satz 19.4).

(20.5)

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \int\limits_{\partial B} \left[\gamma(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|) \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} - g(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \gamma}{\partial \boldsymbol{\nu}}(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|) \right] ds_{\boldsymbol{x}} + \int\limits_{B} \gamma(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|)\, f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x},$$

dabei ist: $\gamma(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|) = E(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_0) + \omega(\boldsymbol{x})$, E die Fundamentallösung von $-\Delta u$, $\omega \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$, $\Delta\omega = 0$ in B.

„Unbekannt" in (20.5) ist im Anbetracht von (20.4) der Ausdruck $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}$. Dies liefert die Motivation, ω so zu wählen, daß $\gamma(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|)$ auf ∂B verschwindet, in der Hoffnung, damit eine Lösungsdarstellung für die (innere) Dirichlet'sche Aufgabe zu bekommen.

Definition 20.4 Green-Funktion 1. Art
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Normalgebiet, ω eine von einem Parameter $\boldsymbol{x}^0$ abhängige Funktion mit $\omega(\cdot|\boldsymbol{x}^0) \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ und $\Delta_{\boldsymbol{x}}\omega(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}^0) = 0$ in B $\forall \boldsymbol{x}^0 \in B$ und E die Fundamentallösung gemäß Satz 19.3.
Ist dann

$$(20.6)\qquad \omega(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}^0) = -E(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}^0) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial B,$$

so heißt

$$(20.7)\qquad G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := E(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) + \omega(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}) \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B$$

Green-Funktion 1. Art zu (20.4).

Setzt man in Satz 19.3: $\gamma = G$ und $\omega = 0$, so erhält man die

Folgerung 20.5
Existiert die Green-Funktion 1. Art zu (20.4), so gilt für die Lösung von (20.4), zumindest unter den Voraussetzungen $u \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$, $\Delta u \in L(B)$, $g \in C^1(\partial B)$,

$$(20.8)\qquad u(\boldsymbol{y}) = \int\limits_B G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} - \int\limits_{\partial B} \frac{\partial_{\boldsymbol{x}} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{\nu}} g(\boldsymbol{x})\, ds_{\boldsymbol{x}}.$$

(Differentiation bezüglich $\boldsymbol{x}$ im 2. Integral)

Bemerkungen

1) Dies ist noch keine Existenzaussage für (20.4).

2) Die Green-Funktion 1. Art zu (20.4) existiert genau dann, wenn $\forall \boldsymbol{x}_0 \in B$ die Randwertaufgabe

(20.9) $$-\Delta_{\boldsymbol{x}}\omega(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_0) = 0 \;\forall \boldsymbol{x} \in B, \quad \omega(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_0) = -E(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|) \quad \underline{\forall \boldsymbol{x} \in \partial B}$$

eine Lösung $\omega \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$ besitzt.

3) Angenommen die Green-Funktion existiert, wann wird dann durch (20.8) die Aufgabe (20.4) für welche f und g gelöst?
Probleme: $u \in C^2(B)$?, $\Delta u =$?, $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{x}) =$? $\boldsymbol{y} \in \partial B$.

4) Man kann zeigen (Walter: Potentialtheorie, §5 Satz VI):
f hölderstetig in $\bar{B}$ und $g \in C(\partial B)$ $\Rightarrow$ (20.8) löst (20.4).

5) Im allgemeinen (d.h. abgesehen von Sonderfällen) ist die Green-Funktion nicht oder nur schwer bestimmbar. Als Beispiel werden wir die Green-Funktion für die Kugel konstruieren.

6) Die Green-Funktion ist eine Fundamentallösung (vgl. (20.7)) und nimmt auf ∂B Nullrandwerte an (vgl. (20.9)). Sie erfüllt

$$-\Delta_{\boldsymbol{x}} E(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_0) = \delta_{\boldsymbol{x}_0} \text{ in } B, \quad G(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_0) = 0 \text{ auf } \partial B \;\forall \boldsymbol{x}_0 \in B$$

und kann gedeutet werden als elektrostatisches Potential einer Einheitsladung, die in $\boldsymbol{x}_0 \in B$ plaziert ist, und das auf ∂B verschwindet (geerdete metallische Hülle).

7) **Die Green-Funktion 1. Art ist eindeutig bestimmt**. (ohne Beweis)

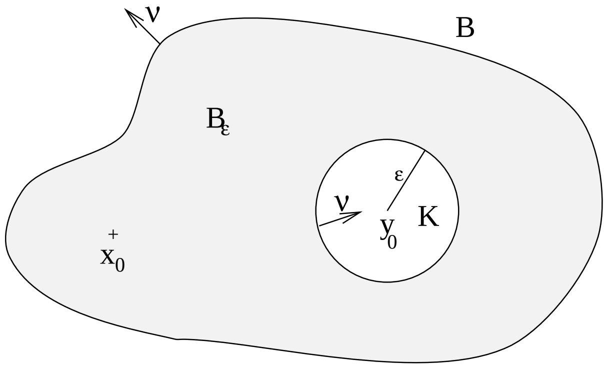
Als weitere Anwendung des Fundamentaltheorems erhalten wir

Folgerung 20.6 Symmetrie der Green-Funktion
Die Green-Funktion 1. Art zu (20.4) ist symmetrisch

$$\text{d.h.} \quad G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in B, \quad \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$$

Physikalische Bedeutung: Reziprokitätsgesetz
Folgerung 20.6 besagt: Das Potential in $\boldsymbol{x}$, erzeugt durch eine Einheitsladung in $\boldsymbol{y}$, ist gleich dem Potential in $\boldsymbol{y}$, das durch eine in $\boldsymbol{x}$ plazierte Einheitsladung erzeugt wird. Die physikalische Erfahrung bestätigt dies.

Beweis Folgerung 20.6
Für feste $\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{x}_0 \in B$ ist $G(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}_0) = G(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}_0) = 0$ auf ∂B (laut Definition), weiterhin ist $u(\boldsymbol{x}) := G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0)$ für $\boldsymbol{y}_0 \in B\backslash\partial B$ harmonisch in $B_\varepsilon = B\backslash\{\boldsymbol{x} \in B; \quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0| < \varepsilon\}$ für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$, sodaß $B_\varepsilon \subset B$, $\boldsymbol{x}_0 \in B_\varepsilon$ (vgl. Abb.).



Wir können somit das Fundamentaltheorem Satz 19.4, (20.1) anwenden auf $u(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)$, $\gamma(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|) = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)$, also $\omega = 0$, (gemeint ist hier das ω aus Satz 19.4) und B_ε statt B. Dann erhalten wir mit $\boldsymbol{\nu}$ als äußerer Normale von B_ε

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}_0) &= G(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \\ &= \int\limits_{\partial B_\varepsilon} \Bigg(\underbrace{G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)}_{=0 \text{ auf } \partial B} \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \underbrace{u(\boldsymbol{x})}_{\substack{=G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0)=0 \\ \text{auf } \partial B}} \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \Bigg)\, ds + \int\limits_{B_\varepsilon} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \underbrace{\Delta u(\boldsymbol{x})}_{=0 \text{ in } B_\varepsilon}\, d\boldsymbol{x} \\ &= \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0|=\varepsilon} \left(G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)}{\partial \boldsymbol{\nu}} - G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) ds. \end{aligned}$$

Wir wenden nochmals (20.1) an, nun auf die Funktionen $\tilde{u}(\boldsymbol{x}) = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)$ – sie ist harmonisch in der Kugel $K = \{\boldsymbol{x};\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_0| < \varepsilon\}$ –, auf $\gamma(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_0|) = G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)$, also $\omega = 0$ und die Kugel K. Beachtet man, daß die äußere Normale von K nun $-\boldsymbol{\nu}$ ist, so folgt

$$\tilde{u}(\boldsymbol{y}_0) = G(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{x}_0) = \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}_0|=\varepsilon} \left(-G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{\nu}} + G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) \frac{\partial G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_0)}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) ds.$$

Die Darstellungen für $G(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ und $G(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{x}_0)$ sind identisch. ■

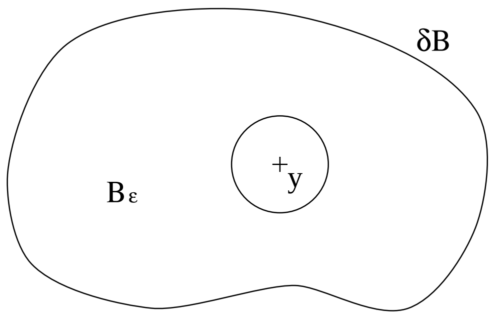
Lemma 20.7
Die Green-Funktion ist positiv, d.h.

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0 \ \text{ für } \ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B, \ \ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}, \ \ B \text{ ein Normalgebiet } \subset \mathbb{R}^n, \ n \geq 2.$$

Beweis: Für festes $\boldsymbol{y} \in B$ setze man (vgl. Definition 20.4)

$$u(\boldsymbol{x}) := G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = E(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) + \omega(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}).$$

Da $\omega \in C^1(\bar{B})$ und $\lim\limits_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}} E(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|) = +\infty$ (**falls** $n \geq 2$), existiert ein $\tilde{\varepsilon} > 0$, sodaß $\forall\, \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}:\ u(\boldsymbol{x}) > 0\ \forall \boldsymbol{x}$ mit $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = \varepsilon$.
Weiter ist $\Delta u = 0$ in $B_\varepsilon = B \backslash \{\boldsymbol{x} \in B;\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leq \varepsilon\}$ und $u = 0$ auf ∂B (Definition 20.4).



Man kann also das *starke* Minimaxprinzip (Korollar 20.3) auf u anwenden, wonach u in B_ε positiv sein muß $(\forall \varepsilon > 0)$, da $\min u = 0$ nur auf ∂B angenommen wird. Gleichzeitig folgt hieraus $\frac{\partial u}{\partial \nu} \le 0$ auf ∂B, denn sonst gäbe es negative Funktionswerte in B_ε.

Für den Fall $n = 1$ wird das Ergebnis in der Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen direkt berechnet. ■

Bemerkungen

1) Man kann die Green-Funktion auch für allgemeinere, elliptische Differentialoperatoren als $-\Delta$ definieren. Dann hängt die Symmetrie der Green-Funktion i.a. mit der formalen Selbstadjungiertheit des Differentialoperators zusammen.

2) Für die Aufgabe (20.4) ist $\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \partial B$ und $\boldsymbol{y} \in B$. Dies liefert der Beweis von Lemma 20.7. Damit erhalten wir aus (20.8) für die Lösung der Aufgabe (20.4) die Monotonieaussage

$$-\Delta u = f \ge 0, g \ge 0 \implies u \ge 0.$$

Dies eröffnet auch die Möglichkeit zur Konstruktion von Näherungslösungen oder Schranken für die Lösung der Aufgabe (20.4), wenn die Existenz der Greensche'sche Funktion 1. Art für die Aufgabe bewiesen ist.

Beispiel:
Insbesondere im Fall $n = 2$ sind viele Lösungen von $\Delta u = 0$ bekannt (vgl. die Beispiele nach Satz 6.6). Bestimmt man die Koeffizienten λ_i einer Linearkombination $\bar{u} = \sum \lambda_i u_i$ von Lösungen von $\Delta u = 0$ so, daß auf ∂B gilt $\bar{u} \ge g$, das ist eine einseitige Approximationsaufgabe, so erhält man für die Lösung der Laplace-Aufgabe wie folgt eine Schranke

$$\Delta(\bar{u} - u) = 0 \text{ auf } B, \ \bar{u} - u \ge 0 \text{ auf } \partial B \implies \bar{u} \ge u \text{ auf } B.$$

3) Als Beispiel konstruieren wir die Green-Funktion für die Kugel.

Satz 20.8 Die Green-Funktion 1. Art für die Kugel
Sei $K_R = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ |\boldsymbol{x}| < R\}$. Die Green-Funktion 1. Art für die Kugel lautet
(20.10)

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} E(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|) - E(\frac{|\boldsymbol{y}|}{R}|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{x}|) & \text{für} \quad \boldsymbol{y} \neq 0, \quad |\boldsymbol{y}| = r \leq R, \quad \bar{\boldsymbol{y}} = \dfrac{R^2}{r^2}\boldsymbol{y}, \\ E(|\boldsymbol{x}|) - E(R) & \text{für} \quad \boldsymbol{y} = 0. \end{cases}$$

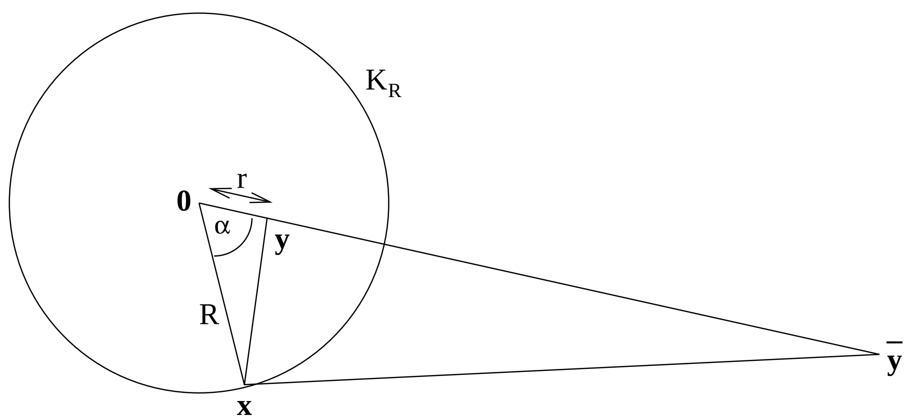
(Die 2. Zeile ist der Grenzwert der 1. Zeile für $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{0}$)
mit der Fundamentallösung E zu $-\Delta$ (vgl. Satz 19.3).

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{r^{2-n}}{(n-2)S_n(1)} & \text{für } n \neq 2, \quad r = |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log\dfrac{1}{r} & \text{für } n = 2. \end{cases}$$

Beweis: Wir leiten die Motivation für die Gestalt von G aus der physikalischen Interpretation im $\mathbb{R}^3$ ab.

Die Green-Funktion ist eine Fundamentallösung $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ mit Pol $\boldsymbol{y}$ innerhalb der Kugel, die auf der Kugeloberfläche verschwindet, was durch Wahl einer geeigneten harmonische Funktion ω erreicht werden soll.
Gemäß ihrer physikalischen Interpretation als Potential einer in $\boldsymbol{y}$ gelagerten Einheitsladung (vgl. Satz 19.3), wird das physikalisch im $\mathbb{R}^3$ realisiert durch eine in einem Punkt $\bar{\boldsymbol{y}}$ außerhalb der Kugel angebrachte negative Ladung, die so groß ist, daß sich für $|\boldsymbol{x}| = R$ die Potentiale der Ladungen in $\boldsymbol{y}$ und $\bar{\boldsymbol{y}}$ gerade aufheben. Das gelingt, wenn man $\bar{\boldsymbol{y}}$ nach dem Schwarz'schen Spiegelungsprinzip bestimmt,
d.h. $\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{y}$, $\bar{\boldsymbol{y}}$ liegen auf einer Geraden und es gilt

$$\frac{|\boldsymbol{y}|}{R} = \frac{R}{|\bar{\boldsymbol{y}}|} \qquad (\iff \quad \bar{\boldsymbol{y}} = \frac{R^2}{r^2}\boldsymbol{y}).$$



Diese Gleichung hat zur Folge, daß die Dreiecke $\boldsymbol{0yx}$ und $\boldsymbol{0x\bar{y}}$ ähnlich sind (gleicher Öffnungswinkel α, gleiche Seitenverhältnisse), d.h. es gilt

$$\frac{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}{r} = \frac{|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{x}|}{R}, \qquad \boldsymbol{x} \in \partial K_R, \qquad |\boldsymbol{y}| = r,$$

bzw.

$$\frac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|} = \frac{R}{r}\frac{1}{|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{x}|}, \quad |\boldsymbol{x}| = R, \quad |\boldsymbol{y}| = r, \tag{20.11}$$

d.h. im $\mathbb{R}^3$ ist auf der Kugel K_R das Potential einer in $\boldsymbol{y}$ plazierten Einheitsladung gerade gleich groß, wie das Potential einer im Punkt $\bar{\boldsymbol{y}}$ plazierten Ladung der Größe $\frac{R}{r}$. Division durch 4π $(= S_3(1))$ ergibt

$$E_3(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|) = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|} = \frac{1}{4\pi}\frac{R}{r}\frac{1}{|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{x}|} = E_3\left(\frac{r}{R}|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{x}|\right), \tag{20.12}$$

Da $E_3(\frac{r}{R}|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{x}|)$ in K_R in x harmonisch ist (nachrechnen), erhält man für $\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := -E_3(\frac{r}{R}|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{x}|)$ (vgl. Definition 20.4) gerade die Greensche Funktion für die Kugel im $\mathbb{R}^3$, also die Behauptung im $\mathbb{R}^3$.

Benutzt man das Spiegelungsprinzip (20.11) für beliebige Raumdimension, so gilt ebenfalls (20.11) und damit

$$\frac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{n-2}} = \frac{R^{n-2}}{r^{n-2}}\frac{1}{|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{x}|^{n-2}} \quad \text{bzw.} \quad \log\frac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|} = \log\frac{1}{|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{x}|} \quad \text{für } n = 2.$$

Damit folgt im im $\mathbb{R}^n$: $E(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|) = E\left(\frac{r}{R}|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{x}|\right)$ und (20.11) garantiert, daß $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in \partial K_R$.
Durch (20.10) ist ω (vgl. Definition 20.4) festgelegt als $\omega(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -E\left(\frac{r}{R}|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{x}|\right)$, und man rechnet nach, daß ω in K_R harmonisch ist in $\boldsymbol{x}$, womit die Eigenschaften aus (20.9) erfüllt sind. Somit ist die Behauptung bewiesen.

Es fehlt noch der Nachweis, daß die 2. Zeile der Definition von $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ aus der 1. Zeile folgt.

$$\frac{r}{R}|\bar{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{x}| = \left|\frac{r}{R}\frac{R^2}{r^2}\boldsymbol{y} - \frac{r}{R}\boldsymbol{x}\right| = \left|\frac{R}{r}\boldsymbol{y} - \frac{r}{R}\boldsymbol{x}\right| \le \frac{R}{r}|\boldsymbol{y}| + \left|\frac{r}{R}\right||\boldsymbol{x}| \overset{r\to 0}{\longrightarrow} R$$

$$\text{und} \quad \left|\frac{R}{r}\boldsymbol{y} - \frac{r}{R}\boldsymbol{x}\right| \ge \left|\frac{R}{r}|\boldsymbol{y}| - \left|\frac{r}{R}\right||\boldsymbol{x}|\right| \overset{r\to 0}{\longrightarrow} R$$

■

Da die Green-Funktion für die Kugel nun bekannt ist, kann man versuchen, die Formel (20.8) zu einer Lösungsformel für die Randwertaufgabe 1. Art auf der Kugel auszubauen. Dazu muß für $\boldsymbol{x} \in \partial K_R$ die Ableitung $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ (Differentiation bezüglich $\boldsymbol{x}$) berechnet werden. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{\nu}\cdot \operatorname{grad}_{\boldsymbol{x}} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\nu} = \frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}, \quad \left(\nu_i = \frac{x_i}{|\boldsymbol{x}|}\right), \\ \frac{\partial}{\partial x_i}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \frac{\partial}{\partial x_i}(E(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|) - E(\frac{r}{R}|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{y}}|)), \qquad |\boldsymbol{y}| = r, \\ &= E'(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\frac{\partial}{\partial x_i}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| - E'(\frac{r}{R}|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{y}}|)\ \frac{r}{R}\ \frac{\partial}{\partial x_i}|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{y}}|. \end{aligned} \tag{20.13}$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| = \frac{x_i - y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{y}}| = \frac{x_i - \bar{y}_i}{|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{y}}|}, \quad \frac{r}{R}|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{y}}| = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \text{ auf } \partial K_R$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= E'(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\left[\frac{x_i - y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} - \frac{r}{R}\frac{x_i - \bar{y}_i}{|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{y}}|}\right], \\
&\qquad \text{mit } |\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{y}}| = \frac{R}{r}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \text{ folgt} \\
&= E'(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)\left[\frac{x_i - y_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|} - \frac{r^2}{R^2}\frac{x_i - \bar{y}_i}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|},\right], \\
&\qquad \text{Einsetzen von } \bar{y}_i = \frac{R^2}{r^2}y_i \text{ ergibt} \\
&= \frac{E'(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, x_i\, (1 - \frac{r^2}{R^2}), \\
&\qquad \text{und wegen } E'(r) = -\frac{r^{1-n}}{S_n(1)} \quad \text{(gilt auch für } n=2!\text{) erhält man} \\
&= -\frac{R^2 - r^2}{R^2}\,\frac{1}{S_n(1)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}\, x_i.
\end{aligned}$$

Einsetzen in (20.13) liefert

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{r^2 - R^2}{R^2 S_n(1)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}|\boldsymbol{x}|.$$

Folgerungen aus diesen Resultaten betrachten wir im Abschnitt

Poissonsche Integralformel und Dirichletproblem

Setzt man $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ein in (20.8), so liefert eine kurze Rechnung (mit $f \equiv 0$)

Satz 20.9 Poissonsche Integralformel
Für $K_R = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n;\ |\boldsymbol{y}| < R\}$ sei $u \in C^2(K_R) \cap C^1(\bar{K}_R)$ und $\Delta u = 0$ in K_R.
Dann gilt

(20.14) $$u(\boldsymbol{y}) = \frac{R^2 - |\boldsymbol{y}|^2}{R S_n(1)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}|=R} \frac{u(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n} ds_n, \quad |\boldsymbol{y}| < R.$$

Bemerkung: Für $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ ist das der Gauß'sche Mittelwertsatz.

Der vorige Satz ist noch keine Lösungsformel für die 1. Randwertaufgabe von $\Delta u = 0$. Er legt jedoch zumindest den Teil a) des folgenden Satzes nahe. Entsprechend wird Teil b) durch Folgerung 20.5 motiviert.

Satz 20.10 Dirichlet-Problem für die Kugel
Sei $K_R = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n;\ |\boldsymbol{y}| < R\}$.

a) Dann gibt es genau eine Lösung $u \in C^2(K_R) \cap C^0(\bar{K}_R)$ des Dirichletproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in} \quad K_R, \\ u &= g \quad \text{auf} \quad \partial K_R, \quad g \in C(\partial K_R), \end{aligned}$$

welche stetig abhängt von g und gegeben wird durch

$$u(\boldsymbol{y}) = \frac{R^2 - |\boldsymbol{y}|^2}{R\ S_n(1)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}|=R} \frac{g(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^n}\, ds_{\boldsymbol{x}}, \quad |\boldsymbol{y}| < R, \tag{20.15}$$

und es gilt sogar $u \in C^\infty(K_R)$.

b) Das inhomogene Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \quad \text{in} \quad K_R, \quad f \in C^1(\bar{K}_R), \\ u &= g \quad \text{auf} \quad \partial K_R, \quad g \in C(\partial K_R) \end{aligned}$$

hat eine eindeutige Lösung $u \in C^2(K_R) \cup C^1(\bar{K}_R)$, die von den Ausgangswerten stetig abhängt:

$$u(\boldsymbol{y}) = \int\limits_{K_R} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} + \frac{R^2 - |\boldsymbol{y}|^2}{R\ S_n(1)} \int\limits_{|\boldsymbol{x}|=R} \frac{g(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^n}\, ds_{x_i} \quad |\boldsymbol{y}| < R. \tag{20.16}$$

G ist die Green-Funktion gemäß Satz 20.8.

Beweis a)
In (20.15) sind alle Größen bekannt. Man kann die Lösungseigenschaft also schlicht nachrechnen (vgl. dazu Walter: Einführung in die Potentialtheorie S. 43 ff oder Triebel Satz 16.5). Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit von den Ausgangsdaten folgen aus dem Minimaxprinzip. Nun ist u aus (20.15) starke Lösung der homogenen Gleichung, also auch distributionelle Lösung (Satz 15.3), und deshalb nach dem Satz von Weyl (Satz 19.7 a)) eine C^∞-Funktion.

Beweis b)
Wir setzen zunächst $g = 0$. Die Lösungseigenschaft für die inhomogene Gleichung mit homogenen Randwerten kann man dann wieder direkt nachrechnen (mit etwas Aufwand). Man kann die Voraussetzung bzgl. f sogar abschwächen zu f lokal Hölder-stetig (vgl. Jacob, §22). Man beachte daß u nach $\boldsymbol{y}$ differenziert wird, f aber als Funktion von $\boldsymbol{x}$ im Integranden steht. Eindeutigkeit und stetige Abhängigkeit folgen wieder aus dem Minimaxprinzip. Die Lösung des inhomogenen Problems erhält man damit als Superposition mit der Lösung aus Teil a).

Bemerkungen

1) Teil b) des Satzes zeigt, daß die Differenzierbarkeitsvoraussezungen des Weyl'schen Lemmas abgeschwächt werden können.

2) Für die Lösung des allgemeinen Dirichletproblems der Potentialgleichung, also $B \neq K_R$, verweisen wir u.a. auf Walter: Potentialtheorie, Triebel: Höhere Analysis u.a.

3) Ist B ein einfach zusammenhängender Bereich $\subset \mathbb{R}^2$ mit mindestens zwei Randpunkten und $\boldsymbol{y} \in B$ beliebig, so gibt es bei Auffassung des $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{C}^1$ nach dem Riemann'schen Abbildungssatz eine holomorphe Funktion

$$f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z}) : \quad B \to \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C};\ |\boldsymbol{z}| < 1\} \quad \text{mit} \quad f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}) = 0.$$

Dann gilt (ohne Beweis):

$$G(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = -\frac{1}{2\pi} \log |f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{z})|$$

ist die Greensche Funktion für B.
(vgl. Ahlfors: Complex Analysis, Chap.VI,5)

Hilbertraum-Methoden zur Lösung partieller Differentialgleichungen: Lax-Milgram Theorie

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir zeigen, wie man für allgemeinere elliptische Randwertaufgaben – insbesondere für Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten – zu Existenzaussagen kommt. Ein analoges Vorgehen liefert auch Existenzaussagen für parabolische und hyperbolische Probleme (vgl. Evans §6).
Dazu benötigen wir als Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis den Darstellungssatz von Riesz, dessen Beweis man in jedem Funktionalanalysisbuch findet.

Satz 20.11 Darstellungssatz von Riesz
Sei $(X, (\cdot,\cdot))$ ein Hilbertraum und X^* der Raum der stetigen linearen Funktionale auf X.

$\Longrightarrow \quad \forall\, f \in X^* \ \exists!\, u \in X : \ \ f(x) = (x, u) \ \forall\, x \in X$.

Die klassische Formulierung des Dirichlet-Problems für elliptische Differentialgleichungen lautet:

Definition 20.12 Klassisches Dirichletproblem
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $f \in C(\overline{\Omega})$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $a_{ij} = a_{ji}$, $g \in C(\partial\,\Omega)$ seien gegebene, reellwertige Funktionen und es gebe ein $C_0 > 0$, sodaß

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x})\, \xi_i\, \xi_j \;\geq\; C_0 |\boldsymbol{\xi}|^2 \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \Omega,\;\; \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{(gleichmäßige Elliptizität)}\,.$$

Gesucht: $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, welches die elliptische RWA löst

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\, \partial_j\, u) \;&=\; f \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \partial_i = \tfrac{\partial}{\partial\, x_i}, \quad \text{(Divergenzform)} \\ u \;&=\; g \quad \text{auf} \quad \partial\,\Omega\,, \end{aligned}$$

Bemerkung: Man könnte auch noch Ableitungen 1. und 0. Ordnung in die Differentialgleichung einführen. Dies bedeutet nur mehr Schreibarbeit (vgl. dazu Evans, §6).
Wir zeigen nun, daß dieses Problem zumindest eine schwache Lösung (eine reguläre Distribution mit gewissen Regularitätseigenschaften, vgl Definition 20.13) besitzt.

Transformation auf homogene Randwerte
Dies wird erlauben, die Differentialgleichung in einem Raum einzubetten, dessen Elemente automatisch die (Null-) Randwerte erfüllen. Man braucht sich dann bei der Lösung der Differentialgleichung nicht mehr um die Annahme der Randbedingungen zu kümmern.
Wir nehmen an, daß die Randwertfunktion eine Fortsetzung $g \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ besitzt (Beispiel Seifenblasen) und erhalten für $\tilde{u} := u - g$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\, \partial_j\, \tilde{u}) \;=\; -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\, \partial_j\, g) + f \quad \text{in} \quad \Omega\,.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$e_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \partial_j\, g\,,$$

multiplizieren die Differentialgleichung mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und erhalten nach partieller Integration auf beiden Seiten, indem wir wieder u statt $\tilde{u}$ schreiben,

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_i\, \varphi)\, a_{ij}\, \partial_j\, u\, d\boldsymbol{x} \;=\; -\int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} (\partial_i\, \varphi)\, e_i + \varphi\, f \right) d\boldsymbol{x} \qquad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,.$$

Ist umgekehrt diese Gleichung erfüllt $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, so erhält man nach Rückgängigmachen der partiellen Integration die ursprüngliche Differentialgleichung wieder zurück.

Einbettung in einen geeigneten Raum, schwache Lösung
Die Testfunktionen treten mit φ bzw. $\partial_i\, \varphi$ auf, die gesuchte Lösung mit $\partial_i\, u$. Als geeigneter Abschluß bietet sich also der Raum $H^{1,2}(\Omega)$, bzw. $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ an (vgl. Definition 13.8 und 13.10), denn die Elemente dieses Raumes besitzen alle Nullrandwerte

(in einem schwachen Sinne), sodaß der Raum als Lösungsraum geeignet ist.

Definition 20.13 schwache Lösung
u heißt *schwache Lösung des Dirichletproblems*, wenn $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ und

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_i \varphi)\, a_{ij}\, \partial_j u \, d\boldsymbol{x} \;=\; -\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} (\partial_i \varphi)\, e_i + \varphi f \right) d\boldsymbol{x} \quad \forall \varphi \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)\,. \tag{20.17}$$

Satz 20.14 Existenz einer schwachen Lösung
Sind $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $e_i, f \in L^2(\Omega)$, so existiert eine schwache Lösung des Dirichletproblems.

Die Voraussetzungen dieses Satzes folgen natürlich aus den Voraussetzungen, die beim klassischen Dirichletproblem genannt wurden. Sie sichern die Existenz der Integrale in Definition 20.13 (Hölder für $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$).

Grundidee der Vorgehensweise:

1) Wir zeigen, daß die linke Seite von (20.17) ein Skalarprodukt $a(u, \varphi)$ in $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ definiert, und
2) daß die dadurch induzierte Norm $\sqrt{a(u,u)}$ äquivalent ist mit $\| \;\|_{H^{1,2}(\Omega)}$.
Dann ist $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $a(\;,\;)$.
3) Wir zeigen, daß die rechte Seite von (20.17) eine stetige Linearform $F(\varphi)$ im Hilbertraum $(\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega), a(\;,\;))$ ist. Dann gibt es nach dem Darstellungssatz von Riesz ein $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$, sodaß $a(u, \varphi) = F(\varphi)$. Dieses u ist dann schwache Lösung des Dirichletproblems.

zu 1) Wir zeigen

$$a(v, w) \;:=\; \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j} (\partial_i v)\, a_{ij}\, \partial_j w \, d\boldsymbol{x} \tag{20.18}$$

ist ein Skalarprodukt in $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$.

Die Linearität ist offensichtlich. Die Existenz des Integrals ergibt sich aus den Integrationsvoraussetzungen (Hölder für $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$). Also ist $a(v, w)$ eine Bilinearform. Die Definitheit ergibt sich im Beweis des nächsten Lemmas aus der Elliptizität.

zu 2) zeigen wir das

Lemma $\left(\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega), a(\;,\;)\right)$ ist ein Hilbertraum.

Beweis:

$H^{1,2}(\Omega)$ ist ein Hilbertraum, $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ ein abgeschlossener Teilraum, also auch ein Hilbertraum bzgl. der Sobolevnorm $\| \; \|_{H^{1,2}(\Omega)}$. Wir zeigen, daß die indudzierte Norm $\|v\|_X := \sqrt{a(v,v)}$ äquivalent ist zu $\| \; \|_{H^{1,2}(\Omega)}$. Dann ist auch $\left(\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega), a(\;,\;)\right)$ ein Hilbertraum.

Zu zeigen ist: es gibt Konstanten $0 < c < C < \infty$, sodaß

$$c\|u\|^2_{H^{1,2}} \;\le\; \|u\|^2_X = a(u,u) \;\le\; C\|u\|^2_{H^{1,2}} \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)\,. \tag{20.19}$$

Beachte: Die linke Ungleichung besagt auch die Definitheit von $a(u,v)$. Die rechte Abschätzung folgt mit der CSU aus der Definition von a (vgl.(20.18)).

$$a(u,u) \;\le\; \sum_{i,j} \|a_{ij}\|_{L^\infty} \, \|\partial_i\, u\|_{L^2} \, \|\partial_j\, u\|_{L^2} \;\le\; C\|u\|^2_{H^{1,2}} \quad \text{für ein } C > 0.$$

Zum Beweis der linken Ungleichung beachten wir im 1. Schritt, daß die gleichmäßige Elliptizität eine Abschätzung von a nach unten ermöglicht. Mit $|\,\mathrm{grad}\; u|^2 = \sum\limits_{i=0}^{n} |\partial_i\, u|^2$ folgt (vgl. (20.18))

$$a(u,u) \;\ge\; C_0 \int\limits_\Omega |\,\mathrm{grad}\; u|^2 \, d\boldsymbol{x}. \tag{20.20}$$

Das Integral existiert, da $\partial_i\, u \in L^2$.

In einem 2. Schritt schätzen wir $\|u\|^2_{H^{1,2}}$ nach oben ab durch $K \int |\,\mathrm{grad}\, u|^2 \, d\boldsymbol{x}$, wodurch die Abschätzung von $a(u,u)$ nach unten vollendet sein wird. Mit $\partial_0\, u := u$ gilt

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^{1,2}} &= \left(\sum_{i=0}^{n} \sqrt{\int |\partial_i\, u|^2 \, d\boldsymbol{x}} \right)^2 \\
&= \int |u|^2 \, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{n} \int |\partial_i\, u|^2 \, d\boldsymbol{x} + \sum_{i,j=0,\; i\neq j}^{n} \sqrt{\int |\partial_i\, u|^2 \, d\boldsymbol{x} \int |\partial_j\, u|^2 \, d\boldsymbol{x}} \\
&\le \int |u|^2 \, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{n} \int |\partial_i\, u|^2 \, d\boldsymbol{x} + \sum_{i,j=0}^{n} \max\left(\int |\partial_i\, u|^2 \, d\boldsymbol{x}, \int |\partial_j\, u|^2 \, d\boldsymbol{x} \right) \\
&\le \int |u|^2 \, d\boldsymbol{x} + \sum_{i=1}^{n} \int |\partial_i\, u|^2 \, d\boldsymbol{x} + \sum_{i,j=0}^{n} \left(\int |\partial_i\, u|^2 \, d\boldsymbol{x} + \int |\partial_j\, u|^2 \, d\boldsymbol{x} \right).
\end{aligned}$$

Deshalb gibt es natürliche Zahlen $k_i,\; i = 0, 1, \ldots, n$:

$$\|u\|^2_{H^{1,2}} \le k_0 \int |u|^2 \, d\boldsymbol{x} + \sum_i k_i \int |\partial_i\, u|^2 \, d\boldsymbol{x} \le \underbrace{\max k_i}_{k} \left(\int |u|^2 \, d\boldsymbol{x} + \int |\,\mathrm{grad}\; u|^2 \, d\boldsymbol{x} \right).$$

Kann man nun noch eine Abschätzung der Art

$$(20.21)\qquad \int_\Omega |u|^2\,d\boldsymbol{x} \;\le\; \hat c \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2\,d\boldsymbol{x} \qquad\qquad (\textit{Poincaré'sche Ungleichung})$$

zeigen, dann folgt mit der Konstanten k

$$\frac{1}{k}\|u\|^2_{H^{1,2}} \le \int_\Omega |u|^2\,d\boldsymbol{x} + \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2\,d\boldsymbol{x} \overset{(20.21)}{\le} (\hat c+1)\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 \overset{(20.20)}{\le} \frac{\hat c+1}{C_0}\,a(u,u)\,,$$

also die gewünschte Abschätzung mit $c = \dfrac{C_0}{k(\hat c+1)}$.

Die Abschätzung (20.21) wird bewiesen in

Satz 20.15 Poincaré Ungleichung
Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, so gibt es ein $\hat c > 0$ (abhängig von Ω) mit

$$(20.21)\qquad \int_\Omega |u|^2\,d\boldsymbol{x} \;\le\; \hat c \int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2\,d\boldsymbol{x} \qquad \forall\, u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)\,.$$

Beweis:
Die Ungleichung muß nur für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gezeigt werden, denn $C_0^\infty(\Omega)$ ist dicht in $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ (vgl. Definition 13.10), d.h. es gibt $\{f_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|u - f_k\|_{H^{1,2}(\Omega)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Der Grenzübergang auf beiden Seiten der Ungleichung für f_k darf ausgeführt werden, wenn die Integrale stetig sind bzgl. $\|.\|_{H^{1,2}(\Omega)}$. Dies folgt mit der Dreiecksungleichung:

$$\big|\|u\|_{L^2} - \|f_k\|_{L^2}\big| \le \|u - f_k\|_{L^2} \le \|u - f_k\|_{H^{1,2}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\big|\|\partial_i u\|_{L^2} - \|\partial_i f_k\|_{L^2}\big| \le \|\partial_i u - \partial_i f_k\|_{L^2} \le \|u - f_k\|_{H^{1,2}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Damit gilt die Ungleichung auch in $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$, wenn sie in $C_0^\infty(\Omega)$ gilt.
Da Ω beschränkt ist, existiert ein $k > 0$, sodaß für $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)^T \in \Omega$ gilt: $|x_i| \le k\ \forall\, i$. Nun erhält man durch partielle Integration für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. x_i :

$$\|\varphi\|^2_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^2 \cdot 1\,d\boldsymbol{x} \;=\; \left|\int_{\mathbb{R}^n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}|\varphi|^2\,d\boldsymbol{x}\right| \;\le\; \int_{\mathbb{R}^n} |x_i|\,2|\varphi|\cdot|\varphi_{x_i}|\,d\boldsymbol{x}$$

$$\le 2k \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|\,|\varphi_{x_i}|\,d\boldsymbol{x} \;\overset{\text{CSU}}{\le}\; 2k\,\|\varphi\|_{L^2}\,\|\varphi_{x_i}\|_{L^2}$$

$$\Longrightarrow\quad \|\varphi\|_{L^2} \;\le\; 2k\|\varphi_{x_i}\|_{L^2} \quad\Longrightarrow\quad \|\varphi\|^2_{L^2} \;\le\; (2k)^2\,\|\varphi_{x_i}\|^2_{L^2}$$

$$\Longrightarrow\quad \exists\,\hat c:\; \|\varphi\|^2_{L^2} \;\le\; \hat c \sum_i \|\varphi_{x_i}\|^2_{L^2} \;=\; \hat c \int_\Omega |\operatorname{grad}\varphi|^2\,d\boldsymbol{x}. \qquad \blacksquare$$

zu 3) Existenz einer schwachen Lösung des Dirichletproblems

Es wird ein $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ gesucht mit

$$a(u,v) \;=\; F\,v \;:=\; -\int\limits_\Omega \left(\sum_i (\partial_i\, v)\, e_i + v\, f\right) d\boldsymbol{x} \qquad \forall\, v \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)\,.$$

Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz gibt es genau so ein u, falls F ein Element $\in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)^*$ ist. Dies trifft zu, da F stetig ist in $\overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
|F\,v| &\overset{\text{Hölder}}{\leq} \sum_i \|\partial_i\, v\|_{L^2}\, \|e_i\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\, \|f\|_{L^2} \\
&\leq \left(\sum_i \|e_i\|_{L^2} + \|f\|_{L^2}\right) \|v\|_{H^{1,2}} \\
&\overset{(20.19)}{\leq} \frac{1}{\sqrt{c}} \left(\sum_i \|e_i\|_{L^2} + \|f\|_{L_2}\right) \|v\|_X
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von Regularitätssätzen kann man starke Lösungen gewinnen. Dies geschieht in zwei Schritten:

1) Man zeigt, daß abhängig von Glattheitsvoraussetzungen an die Koeffizienten der Differentialgleichung, die rechte Seite und den Rand des Gebiets die schwache Lösung sogar in einem $H^{m,2}$, $m > 1$, liegt. Als Beispiel zitieren wie folgenden Satz (vgl. Evans § 6.3, Theorem 5)

Satz 20.16
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, für ein $m \in \mathbb{N}$ gelte
$a_{i,j} \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega$ ein $C^{m+2}-$ Rand und $u \in \overset{\circ}{H}{}^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann ist $u \in H^{m+2,2}(\Omega)$.

2) Mit Hilfe der Sobolev'schen Einbettungssätze zeigt man, daß für hinreichend großes m eine Einbettung der Sobolevräume in Räume stetig differenzierbarer Funktionen möglich ist. Als Beispiel zitieren wir (vgl. Evans § 5.6, Theorem 6)

Satz 20.17
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $\partial\Omega$ ein C^1- Rand;
für $k \in \mathbb{N}$, $k > n/2$ sei $u \in H^{k,2}(\Omega)$.

Dann existiert ein $\tilde{u}$ mit $\tilde{u} = u$ f.ü. in Ω, sodaß

$$\tilde{u} \in C^{k-[\frac{n}{2}]-1,\gamma}(\overline{\Omega}), \qquad \text{wo } \gamma = \begin{cases} [\frac{n}{2}] + 1 - \frac{n}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1 \text{ beliebig}, & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

und es gibt eine Konstante $C > 0$, abhängig von k, n, γ, Ω, sodaß

$$\|\tilde{u}\|_{C^{k-[\frac{n}{2}]-1}(\overline{\Omega})} \leq C\,\|u\|_{H^{k,2}}(\Omega).$$

Dabei bezeichnen $[\frac{n}{2}]$ die größte ganze Zahl $\leq \frac{n}{2}$,

$\|f\|_{C^l(\bar{\Omega})} = \sum\limits_{|\alpha|\leq l} \sup\limits_{\boldsymbol{x}\in\overline{\Omega}} |\partial^\alpha f(\boldsymbol{x})|$ und $C^{l,\gamma}(\overline{\Omega})$ einen Hölder-Raum.

Definition 20.18 Hölderraum
Seien $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $l \in \mathbb{N}$, $0 < \gamma < 1$.

$$(20.22) \quad C^{l,\gamma}(\overline{\Omega}) = \{f \in C^l(\overline{\Omega});\ \|f\|_{C^l(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=l} \sup_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\overline{\Omega},\, \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}} \frac{|\partial^\alpha f(\boldsymbol{x}) - \partial^\alpha f(\boldsymbol{y})|}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^\gamma} < \infty\}$$

heißt *Hölderraum* .

Funktionen aus $C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$ heißen *hölderstetig* zum Exponenten γ .

Bemerkung:
Der Audruck in der Klammer von (20.22) ist eine Norm. Mit dieser Norm wird $C^{l,\gamma}(\overline{\Omega})$ zu einem (Unter-) Banachraum von $C^l(\overline{\Omega})$.

§ 21 Wellen im Raum

Wir betrachten im Folgenden die Wellengleichung

$$\Box_c u = u_{tt} - c^2 \Delta u = f$$

zunächst für 3 (später 2) Raumdimensionen.

Von der kausalen Fundamentallösung E_+ wissen wir (Satz 19.10), daß ihr Träger die Menge $\{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^u;\ |\boldsymbol{x}| = ct, t \geq 0\}$ ist.

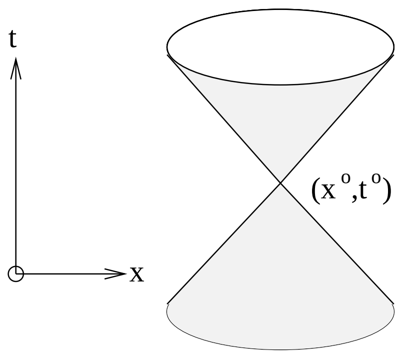
Wir bezeichnen den Kegel im $\mathbb{R}^4$

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| = \big((x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2\big)^{1/2} = c|t - t_0| \tag{21.1}$$

als **charakteristischen Kegel, oder Lichtkegel**. (In der Theorie des Elektromagnetismus ist c die Lichtgeschwindigkeit, und man kann sich den Kegel vorstellen als Vereinigung aller vom „Raumpunkt $(\boldsymbol{x}^0, t_0)$" ausgehenden Lichtstrahlen. Man kann ihn sich entstanden denken durch Rotation einer Charakteristik der eindimensionalen Wellengleichung $(x - x_0 = c(t - t_0))$ um die t-Achse. Er ist eine charakteristische Mannigfaltigkeit, die durch

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{i=1}^{3} (x_i - x_i^0)^2 - c^2(t - t_0)^2 = 0$$

beschrieben wird (nachrechnen mit Satz 11.1). Er ist eine Hyperfläche im 4-dimensionalen Raum. Für jeden festen Zeitpunkt t ist er eine Kugeloberfläche im $\mathbb{R}^3$. Mit $t \to \infty$ wachsen diese Kugeloberflächen konzentrisch mit der Geschwindigkeit c an.



Den oberen Halbkegel von (21.1), $t > t_0$, inklusive seiner inneren Punkte, bezeichnet man als Zukunft bzgl. t_0. Das ist die Menge aller Punkte, die von einem Teilchen, das von $\boldsymbol{x}^0$ zur Zeit t_0 mit einer Geschwindigkeit $\leq |c|$ ausgeht, erreicht werden können. Der untere Halbkegel, inklusive der inneren Punkte, heißt Vergangenheit bzgl. t_0.

Wie weisen nochmals auf die physikalische Bedeutung der Gleichung $\Box u = f$ hin. Sie beschreibt im

$\mathbb{R}^1$: Saitenschwingungen, Klangwellen in Rohren,

$\mathbb{R}^2$: Membranschwingungen (als ARWA) oder Wasserwellen (als AWA),

$\mathbb{R}^3$: akustische, optische, elektromagnetische Wellen.

Die Anfangswertaufgabe

Wir wollen nun, unter einigermaßen allgemeinen Voraussetzungen, die folgende Anfangswertaufgabe für die inhomogene Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$ lösen. Dabei folgen wir im Wesentlichen den Darstellungen von Treves, bzw. Triebel.

$$
\begin{aligned}
\square_c u(\boldsymbol{x},t) &= u_{tt}(\boldsymbol{x},t) - c^2\Delta_{\boldsymbol{x}} u(\boldsymbol{x},t) = f(\boldsymbol{x},t), \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n,\ t\in\mathbb{R},\\
&\left.\begin{aligned} u(\boldsymbol{x},0) &= u_0(\boldsymbol{x}),\\ u_t(\boldsymbol{x},0) &= u_1(\boldsymbol{x}) \end{aligned}\right\} \quad \text{für } t=0,\ \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n.
\end{aligned} \tag{21.2}
$$

Vorgehensweise:

1) Unter zunächst sehr einschneidenden Voraussetzungen führen wir eine Fouriertransformation der Anfangswertaufgabe bzgl. der Ortsvariablen durch und erhalten eine Anfangswertaufgabe für eine gewöhnliche Differentialgleichung, die wir lösen.

2) Die Lösung der Anfangswertaufgabe wird rücktransformiert und liefert eine Lösungsformel für (21.2).

3) Wir stellen fest, daß die Lösungsformel unter viel allgemeineren Voraussetzungen gilt, als wir zu den Schritten 1) und 2) angenommen haben.

4) Wir leiten eine explizite Lösungsdarstellung her und diskutieren die Lösung.

Die folgenden Ausführungen gelten für beliebige $n \in \mathbb{N}$. Wenn wir uns auf $n = 2,3$ zurückziehen, erwähnen wir das.

Wir setzen zunächst voraus:

$$
\begin{aligned}
&f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}),\ \ \mathrm{Tr}\, f \subset \{(\boldsymbol{x},t)\in\mathbb{R}^{n+1};\ |\boldsymbol{x}|\le R\} \text{ für ein } R>0,\\
&u_0, u_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\\
&\text{d.h. insgesamt: } C^\infty \text{ Funktionen mit kompakten Träger bzgl. } \boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{21.3}
$$

Falls unter diesen Voraussetzungen eine Lösung $u \in \mathcal{S}'$ von (21.2) existiert, sind die Voraussetzungen für eine Fouriertransformation bzgl. $\boldsymbol{x}$ (Bezeichnung $F_{\boldsymbol{x}} u = \tilde{u}$) also gegeben.

Sie liefert

$$
(21.4)\qquad \begin{aligned}
&\tilde u_{tt}(\boldsymbol{\xi},t)+c^2|\boldsymbol{\xi}|^2\tilde u(\boldsymbol{\xi},t)=\tilde f(\boldsymbol{\xi},t) &&\text{in}\quad \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^1,\\
&\tilde u(\boldsymbol{\xi},0)=\tilde u_0(\boldsymbol{\xi}),\quad \tilde u_t(\boldsymbol{\xi},0)=\tilde u_1(\boldsymbol{\xi}) &&\text{in}\quad \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

Dies ist eine gewöhnliche, lineare Anfangswertaufgabe für $\tilde u$ bzgl. der Variablen t. Ihre eindeutige Lösung (vgl. die Vorlesung über gewöhnliche Differentialgleichungen (Variation der Konstanten) oder einfach nachrechnen) lautet

$$
(21.5)\qquad \tilde u(\boldsymbol{\xi},t)=\tilde u_0(\boldsymbol{\xi})\cos(c|\boldsymbol{\xi}|t)+\tilde u_1(\boldsymbol{\xi})\frac{\sin(c|\boldsymbol{\xi}|t)}{c|\boldsymbol{\xi}|}+\int_0^t \tilde f(\boldsymbol{\xi},t')\frac{\sin(c|\boldsymbol{\xi}|(t-t'))}{c|\boldsymbol{\xi}|}\,dt'.
$$

Für die Rücktransformation dieser Gleichung beachten wir zunächst, daß

$$
\cos(c|\boldsymbol{\xi}|t)\;=\;\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin(c|\boldsymbol{\xi}|t)}{c|\boldsymbol{\xi}|}\qquad\text{und}\qquad \frac{\sin(c|\boldsymbol{\xi}|t)}{c|\boldsymbol{\xi}|}\;=\;\tilde E_+-\tilde E_-\quad(\text{vgl. (19.16), (19.17)}).
$$

Außerdem wollen wir den Integralausdruck als Faltung bzgl. t schreiben. Hierzu müssen wir die Fälle $t>0$ und $t<0$ unterscheiden. Mit der Heavisidefunktion $H(t)$ folgt

$\mathbf{t>0}$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \tilde f(\boldsymbol{\xi},t')\frac{\sin(c|\boldsymbol{\xi}|(t-t'))}{c|\boldsymbol{\xi}|}\,dt' &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t')\tilde f(\boldsymbol{\xi},t')\,H(t-t')\frac{\sin(c|\boldsymbol{\xi}|(t-t'))}{c|\boldsymbol{\xi}|}\,dt'\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} H(t')\tilde f(\boldsymbol{\xi},t')\,\tilde E_+(\boldsymbol{\xi},t-t')\,dt' \;=\; \{H(t)\tilde f(\boldsymbol{\xi},t)\}\underset{(t)}{*}\{\tilde E_+(\boldsymbol{\xi},t)\}\ (\text{vgl. (19.16)}).
\end{aligned}
$$

$\mathbf{t<0}$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \tilde f(\boldsymbol{\xi},t')\frac{\sin(c|\boldsymbol{\xi}|(t-t'))}{c|\boldsymbol{\xi}|}\,dt' &= -\int_t^0 \tilde f(\boldsymbol{\xi},t')\frac{\sin(c|\boldsymbol{\xi}|(t-t'))}{c|\boldsymbol{\xi}|}\,dt'\\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} H(-t')\tilde f(\boldsymbol{\xi},t')\,H(-(t-t'))\frac{\sin(c|\boldsymbol{\xi}|(t-t'))}{c|\boldsymbol{\xi}|}\,dt'\\
&= +\int_{-\infty}^{\infty} H(-t')\tilde f(\boldsymbol{\xi},t')\,\tilde E_-(\boldsymbol{\xi},t-t')\,dt'(\text{vgl. (19.17)})\\
&= \{H(-t)\tilde f(\boldsymbol{\xi},t)\}\underset{(t)}{*}\{\tilde E_-(\boldsymbol{\xi},t)\}.
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir für (21.5) die Darstellung

$$
\begin{aligned}
\tilde u(\boldsymbol{\xi},t) \;=\;& \tilde u_0(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial}{\partial t}(\tilde E_+-\tilde E_-)+\tilde u_1(\boldsymbol{\xi})(\tilde E_+-\tilde E_-)\\
&+\{H(t)\tilde f(\boldsymbol{\xi},t)\}\underset{(t)}{*}\{\tilde E_+(\boldsymbol{\xi},t)\}+\{H(-t)\tilde f(\boldsymbol{\xi},t)\}\underset{(t)}{*}\{\tilde E_-(\boldsymbol{\xi},t)\}.
\end{aligned}
$$

Zur Rücktransformation (bzgl. $\boldsymbol{\xi}$) dieser Gleichung beachte man, daß Produkte von Fourier-Transformierten in Faltungen übergehen (vgl. Satz 18.12). Auf Grund der kompakten Träger der beteiligten Funktionen spielt die Reihenfolge der Integrationen von Fouriertransformation und Faltung bzgl. t keine Rolle. Man kann im 3. und 4. Summanden der rechten Seite (das sind Integrale über Produkte von Funktionen bzgl. ξ) also auch unter dem Faltungsintegral bzgl. t rücktransformieren. Dies ergibt insgesamt

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\partial}{\partial t}[u_0(\boldsymbol{x}) \underset{(\boldsymbol{x})}{*} (E_+ - E_-)] + u_1(\boldsymbol{x}) \underset{(\boldsymbol{x})}{*} (E_+ - E_-) \\ &+ \{H(t)f(\boldsymbol{x},t)\} \underset{(\boldsymbol{x},t)}{*} E_+ + \{H(-t)f(\boldsymbol{x},t)\} \underset{(\boldsymbol{x},t)}{*} E_-. \end{aligned} \tag{21.6}$$

Durch Anwendung der Faltungsregeln stellt man fest (Übung), daß für u_0 , und entsprechend für u_1 , gilt

$$u_0(\boldsymbol{x}) \underset{(\boldsymbol{x})}{*} E_\pm(\boldsymbol{x},t) = (u_0(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)) \underset{(\boldsymbol{x},t)}{*} E_\pm(\boldsymbol{x},t) \quad (\otimes \ \widehat{=} \ \text{direktes Produkt})$$

Dies erleichtert das Verständnis von u bzw. $u_\pm$ aus (21.6) und (21.7) als Distributionen über $\mathbb{R}^{n+1}$.

Die Lösung setzt sich also zusammen als Überlagerung $u = u_+ + u_-$ einer Lösung u_+ für die Zukunft **und** einer Lösung u_- für die Vergangenheit.

(21.7)

$$u_+(\boldsymbol{x},t) = \frac{\partial}{\partial t}[u_0(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)] \underset{(\boldsymbol{x},t)}{*} E_+ + [u_1(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)] \underset{(\boldsymbol{x},t)}{*} E_+ + \{H(t)f(\boldsymbol{x},t)\} \underset{(\boldsymbol{x},t)}{*} E_+,$$

$$u_-(\boldsymbol{x},t) = -\frac{\partial}{\partial t}[u_0(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)] \underset{(\boldsymbol{x},t)}{*} E_- - [u_1(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)] \underset{(\boldsymbol{x},t)}{*} E_- + \{H(-t)f(\boldsymbol{x},t)\} \underset{(\boldsymbol{x},t)}{*} E_-.$$

Als wichtiges Faktum halten wir fest:

Man kann die Anfangswertaufgabe der Wellengleichung in die Vergangenheit und in die Zukunft lösen.

Wir werden diesen Gesichtspunkt auch im weiteren nicht aus den Augen verlieren.

Wir zeigen nun, daß die Voraussetzung (21.3) zu restriktiv waren.

Lemma 21.1
Für beliebige $u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ existiert eine distributionelle Lösung $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ der Wellengleichung $\Box_c u = f$. Sie wird gegeben durch

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\partial}{\partial t}([u_0(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)] * [E_+ - E_-]) + [u_1(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)] * [E_+ - E_-] \\ &+ \{H(t)f(\boldsymbol{x},t)\} * E_+ + \{H(-t)f(\boldsymbol{x},t)\} * E_-. \end{aligned} \tag{21.8}$$

Beweis: Es treten in (21.8) nur Faltungsprodukte auf, in denen beide Faktoren ihren Träger entweder in $\{t \geq 0\}$ oder in $\{t \leq 0\}$ haben. Wir führen den Beweis für den 1. Fall und zeigen:
$\boldsymbol{E_+ * v}$ **existiert für alle** $\boldsymbol{v \in D'(\mathbb{R}^{n+1})}$ **mit** $\mathbf{Tr}\,\boldsymbol{v} \subset \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \boldsymbol{t \geq 0}\}$.
Die Streifenbedingung für $E_+ * v$ lautet:

$$T := \{(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}, \tau);\ (\boldsymbol{x}, t) \in TrE_+,\ (\boldsymbol{y}, \tau) \in \operatorname{Tr} v,\ |(\boldsymbol{x}, t) + (\boldsymbol{y}, \tau)| = |(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, t + \tau)| \leq a\}$$
$$\text{ist beschränkt } \forall\, a > 0.$$

Wir zeigen das für die einzelnen Komponenten von T:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Wegen } TrE_+, Trv \subset \{t \geq 0\} \text{ folgt } 0 \leq \tau, t \leq a \\ TrE_+ = \{(\boldsymbol{x}, t);\ |\boldsymbol{x}| \leq ct\} \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{x}| \leq ct \leq ca \\ |\boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{x}| \leq a + ca \end{array}\right\} \quad \Rightarrow T \text{ beschränkt.}$$

Beachte: $\operatorname{Tr} E_+ \subset \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; |\boldsymbol{x}| \leq ct, t \geq 0\}$ gilt für alle Raumdimensionen $n \in \mathbb{N}$. (Bewiesen haben wie es für $n = 1, 2, 3$).

Die Lösungseigenschaft erhält man nach Satz 17.6 (beliebige Verteilung der Ableitungen auf die Faltungsfaktoren)

$$\begin{aligned} \Box u(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left([u_0(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)] * \Box[E_+ - E_-]\right) + [u_1(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)] * \Box[E_+ - E_-] \\ &\quad + \{H(t) f(\boldsymbol{x}, t)\} * \Box E_+ + \{H(-t) f(\boldsymbol{x}, t)\} * \Box E_- \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left[(u_0(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)) * (\delta - \delta)\right] + (u_1(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)) * (\delta - \delta) \\ &\quad + (H(t) f(\boldsymbol{x}, t)) * \delta + (H(-t) f(\boldsymbol{x}, t)) * \delta \\ &= H(t) f(\boldsymbol{x}, t) + H(-t) f(\boldsymbol{x}, t) \\ &= f(\boldsymbol{x}, t). \end{aligned} \tag{21.9}$$

■

Das

Lemma 21.2 Annahme der Anfangswerte

im allgemeinen distributionellen Fall muß im Rahmen dieser Vorlesung entfallen, da hierzu Sobolev-Raum-Theorie erforderlich ist (vgl. Triebel, Kap. VIII).

Wir ziehen uns hier zurück auf Lösungen von Anfangswertaufgaben, die ihre Träger in $t \geq 0$ haben und diskutieren die Annahme der Anfangswerte nur für Distributionen mit gewissen Glattheitseigenschaften.
Dazu stellen wir zunächst den Zusammenhang zwischen distributioneller und klassischer Lösung der Anfangswertaufgabe her.

Zusammenhang zwischen distributionellen und klassischen Differentialgleichungsaufgaben

Um die Lösung der AWA für $t \geq 0$ (bzw. $t \leq 0$) zu erhalten, müssen wir aus der allgemeinen Lösung u die Eigenschaften von u_+ bzw. u_- extrahieren, die ja ihren Träger nur in $t \geq 0$ bzw. $t \leq 0$ haben. Wir beschränken uns auf den Fall $t \geq 0$. Offensichtlich ist u_+ keine distributionelle Lösung von $\Box u = f$, denn die Terme in (21.8), die E_- enthalten, fallen im Beweis (21.9) nicht weg.
Aus (21.9) erhalten wir für u_+ bzw. u_-

$$\begin{aligned} \Box u_+(\boldsymbol{x},t) &= \frac{\partial}{\partial t}(u_0(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)) + u_1(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t) + H(t)f(\boldsymbol{x},t), \\ \Box u_-(\boldsymbol{x},t) &= -\frac{\partial}{\partial t}(u_0(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)) - u_1(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t) + H(-t)f(\boldsymbol{x},t). \end{aligned} \tag{21.10}$$

Sind u_+ bzw. u_- Lösungen der Gleichungen (21.10), so ist $u = u_+ + u_-$ wieder eine Lösung von $\Box u(\boldsymbol{x},t) = f(\boldsymbol{x},t)$ (vgl.(21.9)).

Wir nehmen dies als Anlaß zur

Definition 21.3 Distributionelle Anfangswertaufgabe der Wellengleichung

Seien $u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $TrF \subset \{(\boldsymbol{x},t) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t \geq 0\} =: \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}$.
Dann heißt eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\mathrm{Tr}\, u \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}$ Lösung des Anfangswertproblems (21.2) der Wellengleichung (**Cauchyproblem**), falls

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = F + u_0 \otimes \delta' + u_1 \otimes \delta, \qquad (\delta = \delta(t),\ \delta' = \frac{\partial}{\partial t}\delta). \tag{21.11}$$

Beachte: Die Lösung des distributionellen Cauchy-Problems wird nach Satz 19.2 b) gegeben durch $u_+ = (F + u_0 \otimes \delta' + u_1 \otimes \delta) * E_+$ (vgl. auch (21.7)). Hier kann $H(t)$ entfallen (im Vergleich mit (21.7))), da $\mathrm{Tr}\, F \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}$. Die Existenz dieser Faltung wurde im Beweis von Lemma 21.1 gezeigt.
Wir zeigen in Satz 21.5, daß in dieser Formulierung auch die „klassische" Anfangswertaufgabe enthalten ist, und definieren als

Definition 21.4 Klassische Anfangswertaufgabe der Wellengleichung

Seien $\mathbb{R}^{n+1}_{t+} := \{(\boldsymbol{x},t) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}} := \{(\boldsymbol{x},t) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t \geq 0\}$.
Gesucht wird eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}_{t+}) \cup C^1(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}})$ des **Cauchy-Problems**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u &= F(\boldsymbol{x},t), \quad && F \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}),\ \mathrm{Tr}\, F \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}} \\ u(\boldsymbol{x},0) &= u_0(\boldsymbol{x}), && u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n), \\ \frac{\partial}{\partial t}u(\boldsymbol{x},0) &= u_1(\boldsymbol{x}), && u_1 \in C(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{21.12}$$

Den Zusammenhang beider Formulierungen liefert

Satz 21.5

$$\left.\begin{array}{l} u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ löst (21.11) und} \\ u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}_{t+}) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}), \quad u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad u_1 \in C(\mathbb{R}^n) \\ F \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}), \quad F = 0 \text{ für } t < 0, \\ \operatorname{Tr} u, \operatorname{Tr} F \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}} \end{array}\right\} \iff u \text{ löst (21.12)}$$

Bemerkungen

1) Eine distributionelle, reguläre, hinreichend glatte Lösung der distributionellen Anfangswertaufgabe ist auch klassische Lösung der Anfangswertaufgabe und umgekehrt.

2) Der Satz besagt insbesondere, daß die distributionelle Lösung unter obigen Regularitätsvoraussetzungen die Anfangswerte annimmt.

3) Die Anfangsdaten der klassischen Aufgabe tauchen in der distributionellen Formulierung in der Differentialgleichung auf. Dies ist ein allgemein gültiges Phänomen. Wir werden das gleiche Verhalten auch im parabolischen Fall kennenlernen (vgl. dazu den nächsten Paragraphen).

4) Die Aussendung eines Signals im Punkt $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ würde man *klassisch* beschreiben durch $F = 0$ und die Anfangswerte $u_1(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x})$, $u_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$. Die zugehörige distributionelle Formulierung ist wegen $\delta(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)) = \delta(\boldsymbol{x}, t)$ dann gerade die Gleichung für die Fundamentallösung.

Beweis Satz 21.5

„$\Longrightarrow$"

Wir zeigen zunächst, daß die klassische Differentialgleichung erfüllt ist. u sei distributionelle Lösung von (21.11), $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, dann gilt

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u, \varphi \right\rangle &= \langle F, \varphi \rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(u_0 \otimes \delta'), \varphi \right\rangle + \langle u_1 \otimes \delta, \varphi \rangle \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} F(\boldsymbol{x}, t) \varphi(\boldsymbol{x}, t) \, d\boldsymbol{x} dt - \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) \, d\boldsymbol{x} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} u_1(\boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{x}, 0) \, d\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{21.13}$$

Andererseitsfolgt durch partielle Integration (beachte: $\operatorname{Tr} u \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}$)

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u, \varphi \right\rangle \overset{\text{part. Int.}}{=} \left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2\Delta \varphi \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^\infty u(\boldsymbol{x},t)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2\Delta\varphi\right)\, dtd\boldsymbol{x}$$

$$\overset{\text{part. Int.}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u\right)\varphi(\boldsymbol{x},t)\, dtd\boldsymbol{x} - \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)\varphi_t(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_t(\boldsymbol{x},0)\varphi(\boldsymbol{x},0)\, d\boldsymbol{x}. \tag{21.14}$$

Wählt man $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_{t+})$, (dies ist keine Einschränkung, da wir die Differentialgleichung für $t > 0$ nachweisen wollen), so ist $\varphi(\boldsymbol{x},0) = \varphi_t(\boldsymbol{x},0) = 0$. Wir subtrahieren (21.14) von (21.13):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}} (F(\boldsymbol{x},t) - \Box_c u(\boldsymbol{x},t))\varphi(\boldsymbol{x},t)\, d\boldsymbol{x}dt = 0 \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$$

und erhalten, weil $F - \Box_c u$ stetig ist,

$$\Box_c u(\boldsymbol{x},t) = F(\boldsymbol{x},t) \quad \text{in } \mathbb{R}^{n+1}_{t+} \qquad \text{(Erfülltheit der Differentialgleichung).} \tag{21.15}$$

Für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ folgt aus (21.13) – (21.15)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}[u(\boldsymbol{x},0) - u_0(\boldsymbol{x})]\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\boldsymbol{x},0)\, d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\mathbb{R}^n}[u_1(\boldsymbol{x}) - u_t(\boldsymbol{x},0)]\varphi(\boldsymbol{x},0)\, d\boldsymbol{x} = 0 \qquad \forall\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}). \tag{21.16}$$

Wählt man schließlich $\varphi(\boldsymbol{x},t) = \psi(\boldsymbol{x})\eta(t),\ \ \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \ \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und $\eta(t) = 1$ für $|t| \leq 1,$ (wir sind nun an den Anfangswerten interessiert), so folgt aus (21.16)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}[u_1(\boldsymbol{x}) - u_t(\boldsymbol{x},0)]\psi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 0 \quad \forall\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Da u_1, u_t stetig sind, erhalten wir hieraus $\quad u_1(\boldsymbol{x}) = u_t(\boldsymbol{x},0).$

Die Wahl $\varphi(\boldsymbol{x},t) = t\psi(\boldsymbol{x})\eta(t),$ und η,ψ wie oben, liefert, nochmals mit (21.16)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}[u(\boldsymbol{x},0) - u_0(\boldsymbol{x})]\psi(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = 0 \ \ \forall\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

woraus $u_0(\boldsymbol{x}) = u(\boldsymbol{x},0)$ folgt, also die Annahme der Anfangswerte.

Beweis „$\Longleftarrow$“
u genügt (21.14). Setzt man dort die Anfangswerte $u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x})$, $u_1(\boldsymbol{x},0) = u_1(\boldsymbol{x})$ ein, so zeigt der Vergleich mit (21.13) $\Box_c u = F + u_0 \otimes \delta' + u_1 \otimes \delta$. ■

Fazit: Die partielle Integration in (21.14) liefert den Zusammenhang zwischen distributioneller und klassischer Lösung.

Satz 21.6 Eindeutigkeit der Lösung
Die Lösung der distributionellen Anfangswertaufgabe der Wellengleichung (Definition 21.3) und auch die Lösung der klassischen Anfangswertaufgabe (Definition 21.4) sind wegen Satz 21.6 eindeutig.

Bemerkung: Die eindeutige Lösbarkeit der Anfangswertaufgabe beruht darauf, daß in der distributionellen Formulierung die Anfangswerte in die Differentialgleichung eingehen. Deshalb ist zum Beweis der Eindeutigkeit Satz 19.2 anwendbar.

Beweis:
Jede Lösung des Cauchy-Problems Definition 21.3 erfüllt $\Box_c u = F + u_0 \otimes \delta' + u_1 \otimes \delta =: r$.
Wegen $\operatorname{Tr} F \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}$, $\operatorname{Tr}(u_0 \otimes \delta')$, $\operatorname{Tr}(u_1 \otimes \delta) \subset \{(\boldsymbol{x},t) \in \mathbb{R}^{n+1};\ t = 0\}$, folgt $\operatorname{Tr} r \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}$. Also existiert $r * E_+$ (nach Lemma 21.1), und Satz 19.2 b) bestätigt nochmals die Existenzaussage. Da für *jede* Lösung u der Wellengleichung $\operatorname{Tr} u \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}$ gilt, existiert $u * E_+$ für jede Lösung, und Satz 19.2 c) beweist die Eindeutigkeit. ■

Satz 21.7 stetige Abhängigkeit der Lösung
Sei $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ die Lösung der Cauchy-Aufgabe gemäß Definition 21.3 und $u_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ die Lösung des Cauchy-Problems mit F_k, $u_{0,k}, u_{1,k}$ statt F, u_0, u_1.
Dann ist u stetig abhängig von Anfangswerten und rechter Seite in folgendem Sinn:

Gilt für $k \to \infty$

$$\begin{aligned} \langle u_{0,k}, \psi\rangle &\to \langle u_0, \psi\rangle\,, \qquad \langle u_{1,k}, \psi\rangle \to \langle u_1, \psi\rangle \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \\ \langle F_k, \varphi\rangle &\to \langle F, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}), \end{aligned}$$

so folgt

$$\langle u_k, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Für den Beweis dieser Aussage verweisen wir auf Triebel Satz 15.1. Er beruht – wie nicht anders zu erwarten – auf Stetigkeitseigenschaften des direkten Produkts. Wir beschränken uns hier auf den regulären Fall (vgl. dazu die folgenden Sätze).

Um eine explizite Lösung der Cauchy-Aufgabe für reguläre Ausgangsdaten zu erhalten, brauchen wir „nur noch“ die Faltungsausdrücke von (21.8) bzw. (21.7) auszurechnen. Wir tun das zunächst für den Fall $n = 3$.

Wellen im $\mathbb{R}^3$

Satz 21.8 Cauchyproblem in 3 Raumdimensionen
Die Distributionen $u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$ seien regulär und $\operatorname{Tr} F \subset \overline{\mathbb{R}^4_{t+}}$.

a) Dann lautet die (eindeutig bestimmte) Lösung des 3-dimensionalen Cauchyproblems für die Wellengleichung (vgl. Definition 21.3)

$$(21.17)\qquad \begin{aligned} u(\boldsymbol{x},t) &= \frac{1}{4\pi c^2} \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\le ct} \frac{F\left(\boldsymbol{y}, t-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}{c}\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|}\, d\boldsymbol{y} + \frac{H(t)}{4\pi c^2 t} \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=ct} u_1(\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}} \\ &\quad + \frac{H(t)}{4\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=ct} u_0(\boldsymbol{y})\, ds_{\boldsymbol{y}}\right]. \end{aligned}$$

u ist regulär, wenn zusätzlich auch $\partial^s u_0, \forall |s|=1$ regulär ist.

b) Gilt $u_0 \in C^{s+1}(\mathbb{R}^3)$, $u_1 \in C^s(\mathbb{R}^3)$, $F \in C^s(\overline{\mathbb{R}^4_{t+}})$, für $s \ge 2$, so ist $u \in C^s(\mathbb{R}^4_{t+})$ eine klassische Lösung des Cauchyproblems und in jedem endlichen Zeitintervall stetig abhängig von F, u_0, u_1 (sup-Norm).

Beweis a)
Zur Berechnung der Faltungsausdrücke aus der Darstellung von u_+ in (21.7) brauchen wir ein Zwischenergebnis.

Für E_+ (für $n=3$, vgl. Satz 19.10) gilt $\forall \varphi(\boldsymbol{x},t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$ die Darstellung

$$(21.18)\qquad < E_+, \varphi > = \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\int\limits_{|\boldsymbol{x}|=ct} \varphi(\boldsymbol{x},t)\, ds_{\boldsymbol{x}} dt = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(c\boldsymbol{y}, |\boldsymbol{y}|)}{|\boldsymbol{y}|}\, d\boldsymbol{y},$$

denn mit der Substitution $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}/c$, $d\boldsymbol{y} = d\boldsymbol{x}/c^3$ und mit Polarkoordinaten folgt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(c\boldsymbol{y}, |\boldsymbol{y}|)}{|\boldsymbol{y}|}\, d\boldsymbol{y} &= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi\left(\boldsymbol{x}, \frac{|\boldsymbol{x}|}{c}\right)}{\frac{|\boldsymbol{x}|}{c}} \frac{1}{c^3}\, d\boldsymbol{x} = \frac{1}{c^2}\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r}\varphi\left(\boldsymbol{x}, \frac{r}{c}\right) r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\omega\, dr \\ &= \frac{1}{c^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{r}\int\limits_{|\boldsymbol{x}|=1} \varphi\left(\boldsymbol{x}, \frac{r}{c}\right) r^2 ds_{\boldsymbol{x}} dr = \frac{1}{c^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{r}\int\limits_{|\boldsymbol{x}|=r} \varphi\left(\boldsymbol{x}, \frac{r}{c}\right) ds_{\boldsymbol{x}} dr \\ &\overset{r=ct}{=} \frac{1}{c^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\int\limits_{|\boldsymbol{x}|=ct} \varphi(\boldsymbol{x},t)\, ds_{\boldsymbol{x}} dt. \end{aligned}$$

Beachte: Oberflächenelemente für $|\boldsymbol{x}|=1$ bzw. $|\boldsymbol{x}|=r$ sind $ds_{\boldsymbol{x}} = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\omega$ bzw. $ds_{\boldsymbol{x}} = \sin\theta\, d\theta\, d\omega$.

Wir berechnen nun die Faltungsausdrücke aus (21.8) bzw. (21.7). Dazu erinnere man sich an die Definition der Faltung (vgl. (17.4) bzw. (17.5)). Die Faltung $\langle E_+ * F, \varphi\rangle$ existiert und ist endlich für jedes $\varphi \in C_0^\infty$, denn für $\operatorname{Tr} F \subset \overline{\mathbb{R}^4_{t+}}$ wurde die Streifenbedingung im Lemma 21.1 gezeigt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\langle E_+ * F, \varphi\rangle &= \lim_{k\to\infty} \langle E_+(\boldsymbol{y},t), \langle F(\boldsymbol{z},\tau), \varphi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, t+\tau)\ \eta_k(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y},t,\tau)\rangle\rangle\,, \text{ vgl. (17.5)}\\
&= \lim_{k\to\infty} \left\langle E_+(\boldsymbol{y},t), \underbrace{\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}} F(\boldsymbol{z},\tau)\varphi(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},t+\tau)\eta_k(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y},t,\tau)\ d\tau d\boldsymbol{z}\right\rangle}_{=:\psi(\boldsymbol{y},t)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)}
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(21.18)}{=} \lim_{k\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}} F(\boldsymbol{z},\tau)\varphi(c\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z},|\boldsymbol{y}|+\tau)\eta_k(\boldsymbol{z},c\boldsymbol{y},|\boldsymbol{y}|,\tau)\ d\tau d\boldsymbol{z} d\boldsymbol{y}$$

mit der Substitution $\boldsymbol{x} := c\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$, $d\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{z}$ folgt

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}} F(\boldsymbol{x}-c\boldsymbol{y},\tau)\varphi(\boldsymbol{x},\tau+|\boldsymbol{y}|))\eta_k(\boldsymbol{x}-c\boldsymbol{y},c\boldsymbol{y},|\boldsymbol{y}|,\tau)\ d\tau d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y}$$

mit der Substitution $\tau+|\boldsymbol{y}| = t$, $d\tau = dt$ folgt

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|\boldsymbol{y}|}\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}} F(\boldsymbol{x}-c\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{y}|)\varphi(\boldsymbol{x},t)\eta_k(\boldsymbol{x}-c\boldsymbol{y},c\boldsymbol{y},|\boldsymbol{y}|,t-|\boldsymbol{y}|)\ dt d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y}.$$

Durch φ sind $\boldsymbol{x}$ und t beschränkt, $\boldsymbol{y}$ ist wegen $\boldsymbol{y} \le t$ beschränkt, η_k kann also entfallen. Nach Fubini kann die Integrationsreihenfolge vertauscht werden, die iterierten Integrale existieren und sind endlich, es folgt
(21.19)

$$\langle E_+ * F, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}} \varphi(\boldsymbol{x},t)\underbrace{\left[\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{F(\boldsymbol{x}-c\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{y}|)}{|\boldsymbol{y}|}d\boldsymbol{y}\right]}_{=:h(\boldsymbol{x},t)} dt d\boldsymbol{x} \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^4).$$

Da φ beliebig ist, ist $h(\boldsymbol{x},t)$ lokal integrierbar. Wir formen h um:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3}\frac{F(\boldsymbol{x}-c\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{y}|)}{|\boldsymbol{y}|}\,d\boldsymbol{y} &\stackrel{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{x}-c\boldsymbol{y}}{=} \int_{\mathbb{R}^3}\frac{F\left(\boldsymbol{u},t-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}|}{c}\right)}{\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}|}{c}}\frac{1}{c^3}\,d\boldsymbol{u}\\
&= \frac{1}{c^2}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{F\left(\boldsymbol{u},t-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}|}{c}\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}|}\,d\boldsymbol{u}\\
&\ \text{und, da } F=0 \text{ für } t-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}|}{c}<0\\
&= \frac{1}{c^2}\int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}|\le ct}\frac{F\left(\boldsymbol{u},t-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}|}{c}\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}|}\,d\boldsymbol{u}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in (21.19) liefert die Behauptung a) für den 1. Summanden aus (21.17).

Den 2. Term aus (21.7) berechnen wir mit Hilfe der 1. Darstellung von E_+ in (21.18). Wegen $\mathrm{Tr}\,(u_1 \otimes \delta(t)) \subset \overline{\mathbb{R}^4_{t+}}$ existiert die Faltung und wir formen um:

$$\begin{aligned}
\langle E_+ * (u_1 \otimes \delta), \varphi\rangle &\overset{(17.4)}{=} \langle E_+(\boldsymbol{x},t), \langle u_1(\boldsymbol{y}) \otimes \delta(\tau), \eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,\tau)\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+\tau)\rangle\rangle \\
&= \langle E_+(\boldsymbol{x},t), \langle u_1(\boldsymbol{y}), \langle \delta(\tau), \eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,\tau)\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t+\tau)\rangle\rangle\rangle \\
&= \langle E_+(\boldsymbol{x},t), \langle u_1(\boldsymbol{y}), \eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,0)\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t)\rangle\rangle \\
&= \left\langle E_+(\boldsymbol{x},t), \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^3} u_1(\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t), \eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,0)\,d\boldsymbol{y}}_{=:\psi(\boldsymbol{x},t)\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^4)} \right\rangle \\
&\overset{(21.18)}{=} \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\int\limits_{|\boldsymbol{x}|=ct}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u_1(\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,0)\,d\boldsymbol{y}ds_{\boldsymbol{x}}dt \\
&\quad \text{mit der Substitution } \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} =: \boldsymbol{z}, \ \ d\boldsymbol{y} = d\boldsymbol{z} \\
&\quad \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_0^\infty \frac{1}{t}\int\limits_{|\boldsymbol{x}|=ct}\int\limits_{\mathbb{R}^3} u_1(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{z},t)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x},t,0)\,d\boldsymbol{z}ds_{\boldsymbol{x}}dt
\end{aligned}$$

Mit Fubini erhält man

$$\begin{aligned}
\langle E_+ * (u_1 \otimes \delta), \varphi\rangle &= \int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(\boldsymbol{z},t)\frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{|\boldsymbol{x}|=ct} u_1(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x},t,0)\,ds_{\boldsymbol{x}}\,d\boldsymbol{z}dt \\
&= \int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(\boldsymbol{z},t)\frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{|\boldsymbol{x}|=ct} u_1(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x})\,ds_{\boldsymbol{x}}d\boldsymbol{z}dt \\
&\quad \text{mit der Substitution } \boldsymbol{z}-\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}, \ \ ds_{\boldsymbol{x}} = ds_{\boldsymbol{y}} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^4} \varphi(\boldsymbol{z},t) \underbrace{\frac{H(t)}{4\pi c^2 t}\int\limits_{|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}|=ct} u_1(\boldsymbol{y})ds_{\boldsymbol{y}}}_{\text{lokal integrierbar, also regulär, da } \varphi \text{ beliebig}} d\boldsymbol{z}dt.
\end{aligned}$$

$H(t)$ kann ersatzlos gestrichen werden, da für $t<0$ der Integrationsbereich leer ist.

Der letzte Ausdruck aus (21.7) ist $\frac{\partial}{\partial t}\left(E_+ * (u_0 \otimes \delta)\right)$, und wird analog berechnet. Der 3. Term in (21.17) muß nicht regulär sein, da die Ableitung einer regulären Distribution singulär sein kann. Die Aussagen über die Regularität des letzten Ausdrucks folgen aus

Beweis b)
Um die Differenzierbarkeitseigenschaften nachzuprüfen, substituieren wir in (21.17)

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}{ct}, \quad d\boldsymbol{u} = \frac{1}{(ct)^3}\, d\boldsymbol{y}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
u(\boldsymbol{x},t) &= \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_{|\boldsymbol{u}|\le 1} \frac{F(\boldsymbol{x}+ct\boldsymbol{u}, t-t|\boldsymbol{u}|)}{ct|\boldsymbol{u}|}(ct)^3\, d\boldsymbol{u} + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{|\boldsymbol{u}|=1} u_1(\boldsymbol{x}+ct\boldsymbol{u})(ct)^2\, ds_{\boldsymbol{u}} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int\limits_{|\boldsymbol{u}|=1} u_0(\boldsymbol{x}+ct\boldsymbol{u})(ct)^2\, ds_{\boldsymbol{u}}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\boldsymbol{u}|\le 1} \frac{F(\boldsymbol{x}+ct\boldsymbol{u}, t-t|\boldsymbol{u}|)}{|\boldsymbol{u}|}t^2\, d\boldsymbol{u} + \frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\boldsymbol{u}|=1} u_1(\boldsymbol{x}+ct\boldsymbol{u})\, ds_{\boldsymbol{u}} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int\limits_{|\boldsymbol{u}|=1} u_0(\boldsymbol{x}+ct\boldsymbol{u})\, ds_{\boldsymbol{u}}\right].
\end{aligned}$$

Nun hat man feste Integrationsgrenzen, kann also unter den Integralen differenzieren, woraus sich die Behauptungen b) ergeben. Im klassischen Fall folgt aus dieser Darstellung die stetige Abhängigkeit der Lösung von F, u_1, u_0 in der sup-Norm für jedes endliche Zeitintervall. ■

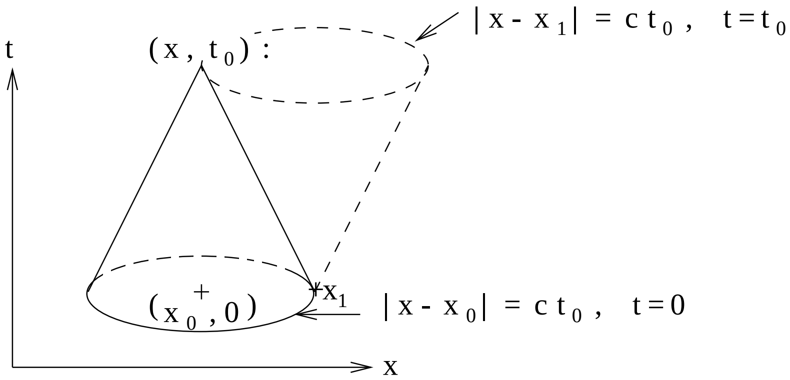
Bemerkungen

1) Unter den Voraussetzungen von Satz 21.8 b) kann man aus der letzten Darstellung für $u(\boldsymbol{x},t)$ nochmals direkt ausrechnen, daß die Anfangswerte angenommen werden (Übung).

2) u kann weniger regulär sein, als die Anfangswerte (Unterschied zum Fall $n=1$ und zu Gleichungen für Wärmeleitungs- oder Laplace-Operator vgl. das Lemma von Weyl).

3) Betrachtet man die reine Wellenausbreitung (ohne zeitlichen Störterm: $F \equiv 0$), so ist der Abhängigkeitsbereich der Lösung u im Punkt $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ nur die Sphäre $|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}| = ct_0$ (Kausalität).

4) Ist $F \equiv 0$, so können die Anfangswerte in einem Punkt $(\boldsymbol{x}_1, 0)$, und dazu gehören auch etwaige Singularitäten, die Lösung $u(\boldsymbol{x},t)$ nur beeinflussen längs der Oberfläche des von $(\boldsymbol{x}_1, 0)$ ausgehenden Lichtkegels (charakteristische Mannigfaltigkeit). Sie ist der Einflußbereich des Punktes $(\boldsymbol{x}_1, 0)$. **(Ausbreitung von Singularitäten).**



Zu einem festen Zeitpunkt t_0 ist ein Signal, das in $(\boldsymbol{x}_1, 0)$ ausgesandt wird, also genau auf der Sphäre $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}| = ct_0$ (Oberfläche der Kugel) zu bemerken.
Huygens'sches Prinzip: Wellen im $\mathbb{R}^3$ (und in jedem $\mathbb{R}^n$ mit ungerader Raumdimension $n \geq 3$) breiten sich scharf aus. (Scharfe Wellenfronten)
In $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$ ist alles zu hören, was zum Zeitpunkt $t = 0$ auf der Sphäre $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0|$ ausgesandt wurde.

5) **Alle Betrachtungen können auch für $t \leq 0$ ausgeführt werden.**

Wellen im $\mathbb{R}^2$

Die Fundamentallösungen im $\mathbb{R}^2$ sind bekannt, und man beweist nach eben vorgeführten Methoden (vgl. Triebel Satz 15.3).

Satz 21.9 Cauchyproblem in 2 Raumdimensionen
Die Distributionen $u_0, u_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $F(\boldsymbol{x},t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ seien regulär und $\operatorname{Tr} F \subset \overline{\mathbb{R}^3_{t+}}$.

a) Dann lautet die (eindeutig bestimmte) Lösung des 2-dimensionalen Cauchyproblems für die
Wellengleichung

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{x},t) \;&=\; \frac{H(t)}{2\pi c} \int_0^t \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\le c(t-\tau)} \frac{F(\boldsymbol{y},\tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}}\, d\boldsymbol{y} \\
&+ \frac{H(t)}{2\pi c} \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\le ct} \frac{u_1(\boldsymbol{y})}{\sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}}\, d\boldsymbol{y} \\
&+ \frac{1}{2\pi c}\,\frac{\partial}{\partial t}\left[H(t) \int\limits_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\le ct} \frac{u_0(\boldsymbol{y})}{\sqrt{c^2t^2 - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}}\, d\boldsymbol{y} \right].
\end{aligned}
\tag{21.20}
$$

b) Gilt $u_0 \in C^{s+1}(\mathbb{R}^2)$, $u_1 \in C^s(\mathbb{R}^2)$, $F \in C^s(\overline{\mathbb{R}^3_{t+}})$, so ist $u \in C^s(\mathbb{R}^3_{t+})$, also für $s \ge 2$ eine klassische Lösung des Cauchyproblems, die in jedem endlichen Zeitintervall stetig von F, u_0, u_1 abhängt.

Der allgemeine Beweis soll hier nicht geführt werden. Er verläuft völlig analog zum Beweis von Satz 21.9 durch Ausrechnung der entsprechenden Faltungsintegrale (die Fundamentallösung ist ja bekannt).

Wir wollen den Beweis für den Spezialfall der homogenen Wellengleichung und den Fall der klassischen Anfangswertaufgabe (21.12) aber führen, indem wir die Lösungsformel (21.20) aus der Lösungsformel (21.17) ableiten durch die sogenannte Hadamard'sche Abstiegsmethode, die klar erkennen läßt, warum das Huygens'sche Prinzip beim Abstieg von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$ verloren geht. Wir haben diese Methode bei der Herleitung der Fundamentallösung für die Wellengleichung im Fall $n = 2$ schon einmal verwendet (vgl. §19).

Beachte dazu: Im räumlich 2-dimensionalen Fall erstrecken sich das 2. und 3.Integral in (21.20) über die ganze Kugel im Gegensatz zum 3-dimensionalen Fall (Satz 21.8), wo nur über die Kugeloberfläche integriert wird.

Die Hadamard'sche Abstiegsmethode

(für $u_{tt} - c^2\Delta_{\boldsymbol{x}} u = 0$) (vgl. John, Chapt. 5)

Grundidee: Spezielle Lösungen der Wellengleichung im $\mathbb{R}^3$, die von x_3 nicht abhängen ($x_3 = 0$), sind Lösungen der Wellengleichung im $\mathbb{R}^2$. Wir nehmen die Lösung aus (21.17) (für $s \geq 2$) und lassen die Anfangswerte u_1 und u_0 nur von zwei Variablen abhängen. Dann hängt die Lösung, die wir ausrechnen auch nur von 2 Raumvariablen ab. Da die Lösung der Anfangswertaufgabe eindeutig ist (Satz 21.6), haben wir damit **die** Lösung der Anfangswertaufgabe im $\mathbb{R}^2$ gefunden. (Wir haben diese Methode schon einmal benutzt, um die Fundamentallösung im $\mathbb{R}^2$ zu konstruieren vgl. §19.)

Die Lösung der Anfangswertaufgabe im $\mathbb{R}^3$ (vgl. (21.2))

$$\begin{aligned} u_{tt} &- c^2\Delta u = 0, \quad u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+) \\ u(\boldsymbol{x},0) &= u_0(\boldsymbol{x}), \qquad u_0 \in C^1(\mathbb{R}^3), \\ u_t(\boldsymbol{x},0) &= u_1(t), \qquad u_1 \in C(\mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

lautet (vgl. (21.17))
(21.21)

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{H(t)}{4\pi c^2 t} \int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=ct} u_1(\boldsymbol{y})\ ds_{\boldsymbol{y}} + \frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{H(t)}{t}\int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=ct} u_0(\boldsymbol{y}) ds_{\boldsymbol{y}}\right], \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Wir zerlegen die Sphäre in einen unteren und oberen Teil und setzen $x_3 = 0$.

$S = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3;\ (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + y_3^2 = c^2t^2\} = S^+ \cup S^-$, $S^\pm = \{\boldsymbol{y} \in S;\ y_3 \gtreqless 0\}$

und betrachten für $(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 \leq (ct)^2$ die Parameterdarstellung

$$S^\pm = \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3;\ \varphi^\pm(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \\ \pm\sqrt{(ct)^2 - (x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2} \end{pmatrix}\right\}.$$

Damit gilt für das Oberlächenelement der Kugel

$$ds_{\boldsymbol{y}} = \left|\frac{\partial\varphi^\pm}{\partial y_1} \times \frac{\partial\varphi^\pm}{\partial y_2}\right|\ dy_1dy_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2}\ dy_1dy_2 = \frac{ct}{|y_3|}\ dy_1dy_2$$

$$\text{mit} \quad y_3 = \pm\sqrt{(ct)^2 - (x_1-y_1)^2 - (x_2-y_2)^2}.$$

Da die Integranden der Integrale im (21.21) nicht von y_3 abhängen, liefern die Integrale über die obere Halbsphäre S^+ und die untere Halbsphäre S^- den gleichen Anteil. Führt man das Oberflächenelement ein, so folgt für das erste Integral
(mit $r^2 = (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2$)

$$\int\limits_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|=ct} u_1(\boldsymbol{y})\ ds_{\boldsymbol{y}} = 2\int\limits_{r\leq ct} u_1(\boldsymbol{y}) \cdot \frac{ct}{\sqrt{(ct)^2 - r^2}}\ dy_1dy_2.$$

Entsprechend verfährt man für das 2. Integral, womit die Formel (21.18) für unseren Spezialfall bewiesen ist. ■

Man beachte nochmals, daß die Integrale über die Oberflächen der Kugeln im $\mathbb{R}^3$ sich beim Abstieg in Integrale über die vollen Kugeln im $\mathbb{R}^2$ verwandeln, wodurch die scharfe Ausbreitung der Signale verloren geht.

§ 22 Die Wärmeleitungsgleichung

Die Anfangswertaufgabe

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} &u_t - a\Delta_{\boldsymbol{x}} u = f, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \\ &u(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}) \quad \text{für } t = 0, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{22.1}$$

zunächst unter den Voraussetzungen

$$\begin{aligned} &f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}), \quad \operatorname{Tr} f \subset \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \ |\boldsymbol{x}| \le R\} \ \text{ für ein } R > 0, \\ &u_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{22.2}$$

Wir gehen vor wie im Fall der Wellengleichung und führen eine Fouriertransformation von (22.1) bzgl. $\boldsymbol{x}$ durch (Bezeichnung: $F_{\boldsymbol{x}} u = \tilde{u}$). Dies liefert

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_t(\boldsymbol{\xi}, t) + a|\boldsymbol{\xi}|^2 \tilde{u}(\boldsymbol{\xi}, t) = \tilde{f}(\boldsymbol{\xi}, t), \\ &\tilde{u}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \tilde{u}_0(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Wir lösen diese Anfangswertaufgabe für eine gewöhnliche Differentialgleichung (Stichwort: integrierender Faktor) und erhalten als Lösung (prüfen durch Einsetzen!)

$$\tilde{u}(\boldsymbol{\xi}, t) \ = \ \int_0^t \tilde{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau) e^{-a|\boldsymbol{\xi}|^2 (t-\tau)} \, d\tau + \tilde{u}_0(\boldsymbol{\xi}) e^{-a|\boldsymbol{\xi}|^2 t}.$$

Analog zur Rücktransformation bei der Wellengleichung (vgl. (21.5)) schreiben wir das Integral um zur Unterscheidung der Fälle $t \ge 0$ und $t \le 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\boldsymbol{\xi}, t) \ &= \ \int_{-\infty}^{\infty} H(\tau) \tilde{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau) H(t-\tau) e^{-a|\boldsymbol{\xi}|^2 (t-\tau)} \, d\tau \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} H(-\tau) \tilde{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau) H(-(t-\tau)) e^{-a|\boldsymbol{\xi}|^2 (t-\tau)} \, d\tau \\ &\quad + \tilde{u}_0 (H(t) + H(-t))(\boldsymbol{\xi}) e^{-a|\boldsymbol{\xi}|^2 t}, \end{aligned}$$

und mit (19.11) und (19.12) folgt hieraus

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\boldsymbol{\xi}, t) \ &= \ \Big\{ H(t) \tilde{f}(\boldsymbol{\xi}, t) \Big\} \underset{(t)}{*} \tilde{E}_+(\boldsymbol{\xi}, t) + \Big\{ H(-t) \tilde{f}(\boldsymbol{\xi}, t) \Big\} \underset{(t)}{*} \tilde{E}_-(\boldsymbol{\xi}, t) \\ &\quad + \tilde{u}_0(\boldsymbol{\xi}) * (\tilde{E}_+ - \tilde{E}_-). \end{aligned}$$

Man beachte, daß für $t \ge 0$ bzw. $t \le 0$ das zweite bzw. das erste Integral $= 0$ ist. Durch Rücktransformation bzgl. ξ erhalten wir (unabhängig von der Raumdimension)

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}, t) \ &= \ \{H(t) f(\boldsymbol{x}, t)\} * E_+(\boldsymbol{x}, t) + \{u_0(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)\} * E_+(\boldsymbol{x}, t) \\ &\quad + \{H(-t) f(\boldsymbol{x}, t)\} * E_-(\boldsymbol{x}, t) - \{u_0(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)\} * E_-(\boldsymbol{x}, t) \\ &=: \ u_+(\boldsymbol{x}, t) + u_-(\boldsymbol{x}, t). \end{aligned} \tag{22.3}$$

Analog zu Lemma 21.2 zeigt man, daß $u = u_+ + u_-$ ist eine distributionelle Lösung der AWA (21.1).

Abschwächung der Voraussetzung (22.2):

Die Faltungen in (22.3) können auch für Distibutionen u_0 und f erklärt werden. Auch die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen werden nicht benötigt. Man kann jedoch auf die Kompaktheitsvoraussetzungen bzgl. der Träger zunächst nicht verzichten, da – anders als im Fall der Wellengleichung – E_+ bzw. E_- als Träger jeweils den ganzen Halbraum $t \geq 0$ bzw. $t \leq 0$ haben. Wie wir gleich zeigen, genügen die Voraussetzungen

$$u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \text{ finit}, \quad f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}), \quad \operatorname{Tr} f \subset \{(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ t \geq 0,\ |\boldsymbol{x}| \leq k\}.$$

Man beachte, daß in der Darstellung (22.3) die Faltungen mit f immer auf einen Halbraum beschränkt sind ($t \geq 0$ oder $t \leq 0$). Die Streifenbedingung für die Faltung mit E_+

$$\{(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}, \tau);\ (\boldsymbol{x}, t) \in \operatorname{Tr} E_+,\ (\boldsymbol{y}, \tau) \in \operatorname{Tr} f,\ |(\boldsymbol{x}, t) + (\boldsymbol{y}, \tau)| \leq a\} \text{ beschränkt } \forall a > 0$$

ist erfüllt, denn wegen $\operatorname{Tr} E_+,\ \operatorname{Tr} f \subset \{t \geq 0\}$ ist $0 \leq \tau,\ t \leq a$, und, daß f räumlich finit ist $(|\boldsymbol{y}| \leq k)$, liefert $|\boldsymbol{x}| \leq \underbrace{|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|}_{\leq a} + \underbrace{|\boldsymbol{y}|}_{\leq k} \leq a + k$.

Entsprechendes gilt für die Faltungen mit E_- .

$u_0(\boldsymbol{x}) \otimes \delta(t)$ hat einen kompakten Träger, $E_+ \in L_{loc}$ nach Satz 19.6, die Faltung existiert also nach Satz 17.6. ∎

Da bekanntermaßen bei Aufgaben für $t < 0$ die Lösung der Anfangswertaufgabe nicht stetig von den Ausgangsdaten abhängt, beschränken wir uns auf $t \geq 0$ und erklären, analog zu Definition 21.3, motiviert durch (22.3)

Definition 22.1 distrib. Cauchy-Aufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

Seien $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $Trf \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}$.
Dann bezeichnen wir als Lösung des Cauchy-Problems für die Wärmeleitungsgleichung jede Distribution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}),\ \operatorname{Tr} u \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}$ mit

$$\text{(22.4)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f + u_0 \otimes \delta, \quad a > 0, \quad (\delta = \delta(t)), \quad \text{(vgl. Triebel §15).}$$

Beachte: Die Definition enthält keine Finitheitsforderungen (vgl. Satz 22.7). Zum folgenden Existenzsatz benßötigt man jedoch Finitheitsforderungen (vgl. dazu obigen Beweis für die Existenz der betreffenden Faltungen).

Analog zum Fall der Wellengleichung erhalten wir aus den obigen Rechnungen oder aus Satz 19.2 b) den

Satz 22.2 Existenzsatz für das Cauchy-Problem
Ist $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ finit, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$, $\operatorname{Tr} f \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}} \cap \{|\boldsymbol{x}| \leq R\}$ für ein $R > 0$, E_+ die Fundamentallösung aus Satz 19.6, so ist

$$u = E_+ * (f + u_0 \otimes \delta) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}), \quad (\delta = \delta(t)). \tag{22.5}$$

eine Lösung des Cauchy-Problems der Wärmeleitungsgleichung.

Beweis: Die Existenz der Faltungen wurde schon gezeigt, die Lösungseigenschaft folgt wieder aus Satz 19.2 b). ■

Beachte: Im Gegensatz zur Wellengleichung fehlt hier eine Eindeutigkeitsaussage. Satz 19.2 c) ist nicht anwendbar, da nicht jede Lösung der Cauchy-Aufgabe sich mit der Fundamentallösung falten läßt.
Dies liegt nicht an einer Unzulänglichkeit von Satz 19.2, denn es gibt reguläre, nicht identisch verschwindende Lösungen zu den Ausgangsdaten $f \equiv 0$, $u_0 \equiv 0$. (vgl. Friedman: PDE of parabolic Type, Prentice-Hall Inc., Kap. 1 §9). Dies zeigt, daß Eindeutigkeitsaussagen ohne Zusatzvoraussetzungen nicht vorliegen können.

Wie im Fall der Wellengleichung zeigen wir auch hier, daß die Definition 22.1 eine Verallgemeinerung ist für die

Klassische Cauchy-Aufgabe der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u = f(\boldsymbol{x}, t), \ f \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}), \ u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}_{t+}) \cap C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}), \ a > 0, \\ &u(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}), \ u_0 \in C(\mathbb{R}^n) \end{aligned} \tag{22.6}$$

Für reguläre Distributionen mit entsprechenden Glattheitseigenschaften sind beide Formulierungen äquivalent.

Satz 22.3
Seien $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}})$, $\operatorname{Tr} f \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}} \cap \{|\boldsymbol{x}| \leq R\}$, reguläre Distributionen und $u \in C^2(\mathbb{R}^{n+1}_{t+}) \cap C(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}})$.
(Als Distributionen gedeutet, werden die Funktionen außerhalb des Trägers durch Null fortgesetzt). Dann sind die distributionelle und die klassische Formulierung der Anfangswertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung äquivalent:

$$u \text{ löst } (22.4) \iff u \text{ löst } (22.6).$$

Beweis
(verläuft wie bei der Wellengleichung)

„$\Longrightarrow$“

Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ bedeutet (22.4)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u, \varphi \right\rangle &= \langle f + u_0 \otimes \delta, \varphi \rangle \\ &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x},t)\varphi(\boldsymbol{x},t)\; d\boldsymbol{x}dt + \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x},0)\; d\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{22.7}$$

Andererseits folgt durch partielle Integration (bzw. Gauß)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u, \varphi \right\rangle &= \left\langle u, -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - a\Delta\varphi \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^\infty u(\boldsymbol{x},t) \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - a\Delta\varphi \right) \; dtd\boldsymbol{x} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{ -\left[u(\boldsymbol{x},t)\varphi(\boldsymbol{x},t) \right]_0^\infty + \int\limits_0^\infty u_t(\boldsymbol{x},t)\varphi(\boldsymbol{x},t)dt \right\} \; d\boldsymbol{x} \\ &\quad - \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} (a\Delta_{\boldsymbol{x}} u)\varphi \; d\boldsymbol{x}dt \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^\infty (u_t - a\Delta_{\boldsymbol{x}} u)\varphi(\boldsymbol{x},t)\; dtd\boldsymbol{x} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(\boldsymbol{x},0)\varphi(\boldsymbol{x},0)\; d\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{22.8}$$

Wenn man $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_{t+})$ wählt, folgt aus dem Vergleich beider Darstellungen

$$u_t - a\Delta u = f(\boldsymbol{x},t) \;\text{ in }\; \mathbb{R}^{n+1}_{t+}.$$

Wählt man $\varphi = \psi\,\eta,\;\; \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\;\; \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\;\; \eta(0) = 1$, so erhält man

$$u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}) \;\text{ in }\; \mathbb{R}^n.$$

„$\Longleftarrow$“

(22.8) erhält man durch partielle Integration, und da u nun klassische Lösung ist, also $u_t - a\Delta u = f,\; u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}),$ schreibt sich (22.8) als

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} - a\Delta u, \varphi \right\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^\infty f(\boldsymbol{x},t)\varphi(\boldsymbol{x},t)\; dtd\boldsymbol{x} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x},0)\; d\boldsymbol{x},$$

und der Vergleich mit (22.7) liefert die Behauptung. ■

Analog zum Fall der Wellengleichung gilt hier für die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Ausgangsdaten:

Satz 22.4 Stetige Abhängigkeit (vgl. Triebel §15)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte:

$$u_0, u_{0,k} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{Tr} u_0, \ \operatorname{Tr} u_{0,k} \subset A$$
$$f, f_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}), \quad \operatorname{Tr} f, \ \operatorname{Tr} f_k \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}} \cap \{|\boldsymbol{x}| \le r\} \text{ für ein } r > 0.$$

u bzw u_k seien Lösungen der (distributionellen) Anfangswertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung mit den rechten Seiten f bzw. f_k und den Anfgangswerten u_0 bzw. $u_{0,k}$. Gilt dann

$$\langle u_{0,k}, \psi \rangle \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle u_0, \psi \rangle \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

$$\langle f_k, \varphi \rangle \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle f, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$$

so folgt $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\langle u_k, \varphi \rangle = \langle E_+ * (f_k + u_{0,k} \otimes \delta_t), \varphi \rangle \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \langle E_+ * (f + u_0 \otimes \delta_t), \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle \,.$$

Beachte: Der Satz bezieht sich auf E_+, also nur auf die Anfangswertaufgabe für $t \ge 0$. Der Beweis beruht wieder auf der Stetigkeit des direkten Produkts. Wir verweisen hierzu auf Triebel §15 Satz 15.5.

Wie im Fall der Wellengleichung können wir auch hier explizite Lösungen angeben, wenn die Distributionen u_0, f regulär sind. Als Hilfsmittel hierzu benötigen wir eine Erweiterung der Faltungseigenschaften für reguläre Distributionen.

Lemma 22.5 (Korollar zu Satz 17.5)
Für $f_1, f_2 \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ gelte die Streifenbedingung
$M_a = \big\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{2n} \,;\ \boldsymbol{x} \in \operatorname{Tr} f_1 \,,\ \boldsymbol{y} \in \operatorname{Tr} f_2 \,,\ |\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \le a\big\}$ ist beschränkt $\forall a > 0$.
Dann existiert fast überall die Faltung

$$h(\boldsymbol{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(\boldsymbol{\xi}) f_2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} \quad \text{und } h \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Beweis:
Die Faltung ist distributionell erklärt, und es gilt

$$\begin{aligned}
\langle f_1 * f_2, \varphi \rangle &= \langle f_1(\boldsymbol{x}), \langle f_2(\boldsymbol{y}), \eta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \rangle \rangle \qquad \text{(vgl. Definition 17.4)} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^{2n}} f_1(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{y}) \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} \overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(\boldsymbol{x}) \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_2(\boldsymbol{y}) \varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \, d\boldsymbol{y} d\boldsymbol{x} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(\boldsymbol{x}) \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_2(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}) \varphi(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{x} \overset{\text{Fubini}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{\xi}) \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_1(\boldsymbol{x}) f_2(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{\xi} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} h(\boldsymbol{\xi}) \varphi(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}, \qquad \text{woraus folgt, daß } h \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Nun können wir zeigen

Satz 22.6
Es sei $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ finit, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ mit $\operatorname{Tr} f \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}} \cap \{|\boldsymbol{x}| \leq R\}$, und beide Distributionen seien regulär.
Dann ist auch die Lösung (22.5) der distributionellen Anfangswertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung (vgl. Satz 22.2) regulär, und es gilt
(22.9)

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{H(t)}{(2\sqrt{\pi a})^n} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4a(t-\tau)}}}{(\sqrt{t-\tau})^n} f(\boldsymbol{y},\tau)\, d\boldsymbol{y}d\tau + \frac{H(t)}{(2\sqrt{a\pi t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y}) e^{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4at}}\, d\boldsymbol{y}.$$

Beachte: Die Darstellung zeigt, daß man zur Berechnung der Lösung im Punkt $(\boldsymbol{x},t)$ nur die Werte für $\tau \leq t$ braucht, was auch physikalisch sinnvoll ist.

Beweis: Bekannt ist die distributionelle Lösung u (vgl. Satz 22.2)

$$u = E_+ * (f + u_0 \otimes \delta_t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Wir brauchen „nur“ noch die Faltungen auszurechnen. Für beide Faltungen ist die Streifenbedingung erfüllt, wie schon gezeigt wurde, und nach Lemma 22.5 ist $E * f$ regulär. Laut Definition der Faltung kann man den 1. Summanden schreiben als

$$\begin{aligned} E_+ * f &= \frac{H(t)}{(2\sqrt{\pi a})^n} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|\boldsymbol{y}|^2}{4a\tau}}}{(\sqrt{\tau})^n} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t-\tau)\, d\boldsymbol{y}d\tau \\ &= \frac{H(t)}{(2\sqrt{\pi a})^n} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4a(t-\tau)}}}{(\sqrt{t-\tau})^n} f(\boldsymbol{y},\tau)\, d\boldsymbol{y}d\tau. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß im 1. Integral $f = 0$ ist für $\tau \geq t$, so genügt es, die Integration bzgl. τ nur über das Interval von 0 bis t zu erstrecken.
Für den 2. Summanden gilt (die Faltung existiert)

$$\begin{aligned} \langle E_+ * (u_0 \otimes \delta), \varphi\rangle &= \langle E_+(\boldsymbol{x},t), \langle u_0(\boldsymbol{y}) \otimes \delta(\tau), \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t+\tau)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,\tau)\rangle\rangle \\ &= \langle E_+(\boldsymbol{x},t), \langle u_0(\boldsymbol{y}), \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, t)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,0)\rangle\rangle \\ &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t})^n} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4at}} u_0(\boldsymbol{y}) \varphi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},t)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t,0)\, d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x}dt \\ &\underset{d\boldsymbol{x}=d\boldsymbol{z}}{\overset{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{z}}{=}} \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\boldsymbol{z},t) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\sqrt{\pi a t})^n} e^{-\frac{|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}|^2}{4at}} \underbrace{\eta(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{y},t,0)}_{=1} u_0(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{z}dt \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi(\boldsymbol{z},t) \frac{H(t)}{(2\sqrt{\pi a t})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}|^2}{4at}} u_0(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{z}dt. \quad (u \text{ ist finit}) \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Darstellung des 2. Summanden aus (22.9) sowie seine lokale Integrierbarkeit. ■

Aus der Darstellung (22.9) läßt sich ableiten, daß es möglich ist, die Kompaktheitsforderungen an die Träger von u_0 und f durch Beschränktheitsforderungen zu ersetzen.

Satz 22.7
Seien $u_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ regulär und $\operatorname{Tr} f \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}}$. Für $M_1, M_2 > 0$ sei

$$|u_0(\boldsymbol{x})| \le M_1 \quad \text{fast überall auf } \mathbb{R}^n, \quad |f(\boldsymbol{x}, t)| \le M_2 \quad \text{fast überall auf } \mathbb{R}^{n+1}_{t+}.$$

Dann ist die Lösung der Anfangswertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung regulär und durch (22.9) gegeben.

Insbesondere gilt

$$|u(\boldsymbol{x}, t)| \le t \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^{n+1}_{t+}} |f(\boldsymbol{x}, t)| + \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^n} |u_0(\boldsymbol{x})|. \tag{22.10}$$

Beachte: Aus (22.10) folgt die stetige Abhängigkeit der Lösung von der rechten Seite und den Anfangswerten in jedem endlichen Zeitintervall $0 \le t \le T$.

Beweis: Laut Definition der Faltung kann $E_+ * f$ wir folgt geschrieben und abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
|E_+ * f| &= \left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|\boldsymbol{y}|^2}{4a\tau}}}{(\sqrt{4a\tau\pi})^n} \, f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t - \tau) \; d\boldsymbol{y} d\tau \right| \\
&\quad \text{mit der Substitution } \boldsymbol{z} = \frac{\boldsymbol{y}}{\sqrt{4a\tau}}, \; d\boldsymbol{z} = \frac{1}{(\sqrt{4a\tau})^n} \, d\boldsymbol{y} \\
&\le \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{e^{-z^2}}{(\sqrt{\pi})^n} \right| \; \underbrace{\left| f\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\sqrt{4a\tau}, t - \tau\right) \right|}_{\le M_2} \; d\boldsymbol{z} d\tau \\
&\le t\, M_2, \quad \text{da nach (18.4)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-z^2} \; dz = \pi^{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}$$

Entsprechend gilt für den 2. Summanden mit der gleichen Substitution (ersetze τ durch t)

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y}) \frac{e^{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4at}}}{(\sqrt{4\pi a t})^n} \; d\boldsymbol{y} \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \frac{e^{-\frac{|\boldsymbol{y}|^2}{4at}}}{(\sqrt{4\pi a t})^n} \; d\boldsymbol{y} \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{|u_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\sqrt{4at})|}_{\le M_1} \; \left| \frac{e^{-z^2}}{(\sqrt{\pi})^n} \right| d\boldsymbol{z} \le M_1.
\end{aligned}$$

■

Die Eindeutigkeit der Lösung läßt sich nur unter der Voraussetzung von Wachstumsbeschränkungen zeigen. Wie zitieren (ohne Beweis) ein Ergebnis von Friedmann: PDEs of parabolic Type, Chap. 1, Sec. 9.

Satz 22.8
Es gibt höchstens eine stetige Lösung u der Anfangswertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung für $0 \leq t \leq T$, welche der Bedingung

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u(\boldsymbol{x},t)| e^{-k|\boldsymbol{x}|^2} \, d\boldsymbol{x} dt < \infty \text{ für ein } k > 0 \tag{22.11}$$

genügt.

Die Eindeutigkeit geht verloren, wenn man in (22.11) $e^{-k|\boldsymbol{x}|^2}$ ersetzt durch $e^{-k|\boldsymbol{x}|^{2+\varepsilon}}$.

Für die Lösung der Anfangswertaufgabe mit homogener Wärmeleitungsgleichung kann man sehr einfach Glattheitsaussagen aus den vorhergehenden Sätzen ableiten. Wir verzichten darauf, da wir die Aussage $u \in C^\infty$ schon als Folgerung aus dem Lemma von Weyl bewiesen haben.

Index

Index