Julian Holstein

Blatt 1

Übung 1.1 (3 Punkte)

Sei $G_{p,v}$ die Gerade mit $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$. Sei $y = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Beweisen Sie sehr sorgfältig, dass der Punkt y auf der Gerade $G_{p,v}$ liegt, aber der Punkt x nicht.

Übung 1.2 (6 Punkte)

1. Betrachten Sie die lineare Gleichung $x_1 - 5x_2 = 3$. Bestimmen Sie eine Gerade $G_{p,v}$ in $\mathbb{R}^2$, die alle Lösungen parametrisiert.
2. Seien $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Punkte in $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie eine lineare Gleichung, die $G_{p,v}$ als Lösungsmenge hat.

Hinweis: Betrachten Sie den Beweis von Lemma 1.2.8.!

Übung 1.3 (5 Punkte)

Betrachten Sie die Geraden $G_{p,v}$ und $G_{q,w}$ in $\mathbb{R}^2$. Wie viele Punkte liegen im Schnitt der beiden Geraden?

Hinweis: Die Antwort hängt von p, q, v und w ab!

Übung 1.4 (5 Punkte)

Zwei Vektoren v, w in $\mathbb{R}^2$ heißen *linear unabhängig*, wenn für alle $t, s \in \mathbb{R}$ die Gleichung $tv + sw = 0$ nur gilt wenn t und s gleich Null sind. Geben Sie je ein Beispiel für zwei linear unabhängige und für zwei nicht linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$ an.

Ein Dreieck mit Eckpunkten $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ heißt *ausgeartet*, falls x, y und z auf einer Geraden liegen. Zeigen Sie, dass ein Dreieck mit Eckpunkten $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ **genau dann** nicht ausgeartet ist, wenn $x - y$ und $x - z$ linear unabhängig sind.

Übung 1.5 (1 Punkt)

* Seien $x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen so dass $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ und $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ gilt. Was ist der größte Wert, den $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n + x_n \cdot x_1$ annehmen kann?

Hinweis: Diese Frage ist schwierig und wir werden Sie später im Kurs genauer untersuchen. Aber versuchen Sie sich ruhig schon einmal daran. Können Sie Teilresultate zeigen, z.B. für kleine Werte von n?

Abgabetermin ist die Vorlesung am 23.10.23.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.