

## Blatt 11 Matrizen

### Übung 11.1 (2 Punkte)

Seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume und  $U \leq V$ . Was ist die Dimension von  $\text{Hom}_U(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f|_U = 0\}$ ?

### Übung 11.2 (7 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Menge  $O(n, K)$  aller Matrizen  $M \in M(n \times n, K)$ , die  $MM^T = E_n$  erfüllen, eine Gruppe bilden.
2. Zeigen Sie, dass alle Rotationen  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$  in  $O(2, \mathbb{R})$  liegen.
3. Finden Sie ein Element von  $O(2, \mathbb{R})$ , das keine Rotation ist.
4. Für jeden (Spalten-)Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  ist die *Länge* von  $v$  definiert als  $\|v\| = \sqrt{v^T v} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$ . Zeigen Sie, dass für jedes  $M \in O(n, \mathbb{R})$  gilt  $\|Mv\| = \|v\|$  für alle  $v \in \mathbb{R}^n$ .
5. Zeigen Sie, dass jede Matrix  $M$  mit  $\|Mv\| = \|v\|$  für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  auch in  $O(n, \mathbb{R})$  liegt.  
*Hinweis:* Betrachten Sie die Fälle  $v = e_i$  und  $v = e_i + e_j$  und zeigen Sie, dass für jede Matrix  $X \in M(n \times n, K)$  gilt  $e_i^T X e_j = X_{ij}$ .

### Übung 11.3 (4 Punkte)

Sei  $X$  ein  $K$ -Vektorraum,  $x, y \in X$  und  $V, W$  Untervektorräume. Zeigen Sie, dass  $x + V = y + W$  genau dann gilt, wenn  $x - y \in V$  und  $V = W$ .

**Übung 11.4 (6 Punkte)**

Finden Sie alle Lösungen des Gleichungssystem mit der folgenden erweiterten Koeffizientenmatrix. Was ist die Dimension der Lösungsmenge?

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 9 & 0 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 6 & 11 & -8 \\ 2 & 6 & -4 & -1 & 11 \\ -2 & -3 & 8 & 13 & -13 \\ -1 & -3 & 2 & -1 & -6 \end{array} \right)$$

**Übung 11.5 (1 Punkt)**

\* Bestimmen Sie alle Elemente der Gruppe  $GL(2, \mathbb{F}_2)$  und finden Sie einen Isomorphismus zu einer Ihnen bekannten Gruppe.

**Abgabetermin ist die Vorlesung am 15.1.2024.**

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede\*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.