Julian Holstein

Blatt 12

Übung 12.1 (4 Punkte)

Sei D die Elementarmatrix $\delta(r, s, \lambda) \in M(n \times n, K)$ mit $r, s \in \{1, \dots, n\}, \lambda \in K$ und seien $A = (a_{jk}) \in M(n \times r, K)$ und $B = (b_{ij}) \in M(m \times n, K)$ beliebig.

Prüfen Sie, dass DA aus A entsteht, indem das λ-fache der r-ten Zeile zur s-ten Zeile addiert wird.

Berechnen Sie BD.

Übung 12.2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{F}_5)$ über dem Restklassenkörper mit 5 Elementen. Wir schreiben hier der Einfachheit halber für jede ganze Zahl k auch die Restklasse $\overline{k}$ als k.

Berechnen Sie M^{-1}.

Übung 12.3 (6 Punkte)

Wir erinnern uns, dass die Rotation r um den Winkel θ in $\mathbb{R}^2$ von der Matrix $M = M(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ dargestellt wird. Nun betrachten wir die selbe Matrix als Element $M \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$, indem wir alle Einträge als komplexe Zahlen mit Imaginärteil 0 auffassen. Diese komplexe Matrix ist die Darstellung einer linearen Abbildung $r_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ bezüglich der Standardbasis, also $M = M(r_{\mathbb{C}})$.

Betrachten Sie die geordnete Basis $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right)$ für $\mathbb{C}^2$.

Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}}(r_{\mathbb{C}})$ direkt, indem Sie das Bild der Basisvektoren betrachten, und berechnen Sie $M_{\mathcal{B}}(r_{\mathbb{C}})$ mithilfe der Transformationsformel, indem Sie die Basiswechselmatrix und ihr Inverses bestimmen.

Übung 12.4 (5 Punkte)

Sei $\mathcal{B}$ die geordnete Basis

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^3$ und sei f bezüglich der Standardbasis gegeben durch die darstellende Matrix

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}}(f)$.

Übung 12.5 (1 Punkt)

Eine *abzählbar unendliche Matrix* $A = (a_{ij})$ ist gegeben durch Koeffizienten $a_{ij} \in K$ für $i, j \in \mathbb{N}$.

Wir betrachten den unendlich-dimensionalen Vektorraum $V = \oplus_{\mathbb{N}} K$.

Können wir eine beliebige lineare Abbildung von V nach V durch eine abzählbar unendliche Matrix ausdrücken?

Welche abzählbar unendlichen Matrizen stellen lineare Abbildungen von V nach V dar?

Sei $W = \prod_{\mathbb{N}} K$. Welche linearen Abbildungen $V \to W$ lassen sich durch abzählbar unendliche Matrizen darstellen?

Welche linearen Abbildungen $W \to V$ und $W \to W$ lassen sich durch abzählbar unendliche Matrizen darstellen? (Für diesen letzten Teil genügen anschauliche Argumente.)

Abgabetermin ist die Vorlesung am 22.1.2024.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.