Blatt 4

Übung 4.1 (3+2 Punkte)

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\})$ gleich 2^nist.

2. Hier ist ein induktiver Beweis, dass in jedem Hunderudel alle Hunde die gleiche Farbe haben.

   Sei n die Größe des Rudels. Wir beginnen mit dem Induktionsanfang $n = 1$. Das Rudel hat nur einen Hund, und der hat eine Farbe. Also haben alle Hunde die gleiche Farbe. (Wir nehmen an, dass all unsere Hunde einfarbig sind.)

   Die Induktionsvoraussetzung ist, dass für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ alle Hunde in einem Rudel der Größe n die gleiche Farbe haben.

   Für den Induktionsschritt betrachten wir ein Rudel mit $n + 1$ Hunden. Wir nehmen einen beliebigen Hund heraus und erhalten ein Rudel von n Hunden, in dem nach Induktionsvoraussetzung alle Hunde die gleiche Farbe haben. Es gibt also höchstens einen fehlfarbigen Hund. Jetzt entfernen wir aber einen anderen Hund aus dem Rudel (von dem wir schon wissen, dass er die gleiche Farbe wie die meisten anderen hat), und erhalten wieder nach Induktionsvoraussetzung, dass alle Hunde außer diesem die gleiche Farbe haben. Aber in diesem Unterrudel ist auch unser zuerst entfernter Hund. Damit hat er die gleiche Farbe wie alle anderen.

   Die Aussage ist natürlich falsch. Wo liegt der Fehler im „Beweis“?

Übung 4.2 (4+2 Punkte)

1. Wir betrachten Relationen auf der Menge $\{0, 1, 2\}$.

   (a) Wie viele Relationen auf der Menge $\{0, 1, 2\}$ gibt es?

   (b) Wie viele sind Äquivalenzrelationen?

   (c) Wie viele sind Funktionen?

   (d) Wie viele sind Bijektionen?

2. Sei A eine beliebige Menge. Es gilt $A \times \emptyset = \emptyset$. (Überlegen Sie sich, wieso das gilt!)

   (a) Wie viele Funktionen gibt es von $\emptyset$ nach A?

   (b) Wie viele Funktionen gibt es von A nach $\emptyset$?

Übung 4.3 (4 Punkte)

Sind die folgenden Relationen Äquivalenzrelationen? Geben Sie Beweise.

1. Für ganze Zahlen sei $a \sim b$ wenn $a \mid b$ oder $b \mid a$. Hier bedeutet $a \mid b$, a teilt b, d.h. es gibt eine ganze Zahl k mit $ka = b$.
2. Für Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ sei $v \sim w$ wenn es $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt mit $v = tw$.

Übung 4.4 (4 Punkte)

Sei U die Menge $\{1, 2, \ldots, 12\}$ mit der Operation $\odot : U \times U \to U$ definiert durch

$$m \odot n := \begin{cases} m + n & \text{wenn } m + n \leq 12 \\ m + n - 12 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dies eine Gruppe ist.

Übung 4.5 (1 Punkt)

* Sei M eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $*$. Nehmen wir an, dass M nicht leer ist, und es für jedes $m \in M$ ein eindeutiges m' gibt mit $m * m' * m = m$. Zeigen Sie, dass M eine Gruppe ist.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 13.11.2019.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.