Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Julian Holstein
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I (Bachelor)
Wintersemester 2023/24

Blatt 5 Gruppen und Homomorphismen

Übung 5.1 (5 Punkte)

Bestimmen Sie alle Symmetrien (Rotationen und Spiegelungen) eines regulären Fünfecks. Beschreiben Sie die Gruppenstruktur, indem Sie alle Inversen bestimmen und für eine ausgewählte Rotation a und Spiegelung b die Produkte ab und ba berechnen.

Übung 5.2 (2 Punkte)

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $H \subset G$. Zeigen Sie, dass H genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn H nicht leer ist und für alle $a, b \in H$ auch ab^{-1} enthält.

Übung 5.3 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe mit neutralem Element e und $g \in G$. Wir nennen die kleinste natürliche Zahl $n > 0$ mit $g^n = e$ die *Ordnung* von g.

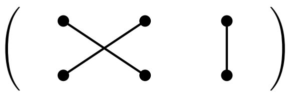
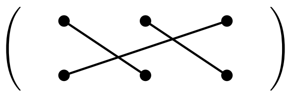
1. Zeigen Sie, dass die Ordnung eines beliebigen Elements $g \in G$ die Ordnung von G teilt.
2. Zeigen Sie, dass eine Gruppe, in der jedes Element Ordnung 2 hat kommutativ ist.
3. Zeigen Sie, dass jede Gruppe mit gerader Ordnung ein Element der Ordnung 2 hat.

Übung 5.4 (4 Punkte)

1. Sei $G = S_3$ die symmetrische Gruppe von $\{1, 2, 3\}$. Seien h und g die Permutationen
$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
wobei wir unter jedes Element von G das Bild unter h bzw. g schreiben.
Bestimmen Sie ghg^{-1}.
2. Sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element. Zeigen Sie, dass $h \mapsto ghg^{-1}$ ein Gruppenisomorphismus von G nach G ist.
3. Seien G, G' Gruppen und $f : G \to G'$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ und $k \in \ker(f)$ gilt $gkg^{-1} \in \ker(f)$.

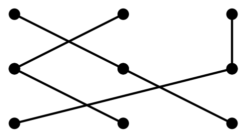
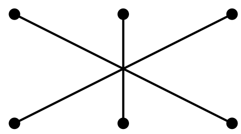
Übung 5.5 (5 Punkte)

Sei n eine natürliche Zahl. Ein *Diagramm* besteht aus $2n$ Punkten, angeordnet in 2 übereinanderliegenden horizontalen Reihen mit je n Punkten, und n geraden Linien, die je einen Punkt oben mit einem Punkt unten verbinden. Jeder Punkt ist Endpunkt von genau einem Geradenabschnitt. Zum Beispiel

$a =$  und $b =$ 

sind beides Diagramme für $n = 3$.

Wir definieren eine Verknüpfung $\ast$ auf der Menge der Diagramme B_n, indem wir zwei Diagramme vertikal übereinander schreiben, die Linien verbinden und gerade ziehen. Zum Beispiel zeichnen wir für $a \ast b$ zunächst das Diagramm

 und ziehen dann gerade und erhalten 

Zeigen Sie durch Nachweisen der Gruppenaxiome, dass dies eine Gruppe $(B_n, \ast)$ definiert.

Ist diese Gruppe isomorph zu einer Gruppe, die Sie aus der Vorlesung kennen?

* Finden Sie einen surjektiven Gruppenhomomorphismus von B_n in die Gruppe $\mathbb{Z}/2$.

Hinweis. Sie können bei dieser Aufgabe auch anschauliche Argumente verwenden. Vollständig rigorose Beweise sind recht schwierig!

Abgabetermin ist die Vorlesung am 20.11.23.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.