Blatt 7

Übung 7.1 (4 Punkte)

Sei $V = \mathbb{R}^4$. Betrachten Sie die beiden Teilmengen

$$U = \{ x \in V \mid x_1 = 0,\, x_2 + x_3 = 0 \}$$

und

$$W = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \{ x \in V \mid x_1 = x_3 = x_4 = 0 \}.$$

1. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum ist. (Wir wissen aus der Vorlesung, dass W ein Untervektorraum ist.)
2. Beschreiben Sie $U \cap W$.
3. Beschreiben Sie $U \cup W$.
4. Beschreiben Sie $U + W$.

Übung 7.2 (4 Punkte)

1. Sei X eine beliebige Menge und K ein Körper. Definieren Sie Addition und Skalarmultiplikation und zeigen Sie sorgfältig, dass $A = \mathrm{Abb}(X, K)$ ein K-Vektorraum ist.
2. Sei $x \in X$. Zeigen Sie dass $A_0 = \{f \in \mathrm{Abb}(X, K) \mid f(x) = 0\}$ ein Untervektorraum ist.
3. Finden Sie einen anderen Untervektorraum $W \leq A$, so dass $A = W \oplus A_0$.

Übung 7.3 (5 Punkte)

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Seien T, U, W Untervektorräume von V.

1. Zeigen Sie, dass $T \cup U$ nur ein Untervektorraum von V ist, wenn $T \leq U$ oder $U \leq T$ gilt.
2. Geben Sie Gegenbeispiele für die beiden folgende Aussagen.

(a) $T + (U \cap W) = (T + U) \cap (T + W)$,

(b) $(T + U) \cap W = (T \cap W) + (U \cap W)$.

3. Zeigen Sie, dass in jeder der falschen Gleichungen in 2. jeweils eine der beiden Inklusion, $\subset$ oder $\supset$, gilt.

Übung 7.4 (2 Punkte)

Sei K ein Körper und seien V, W zwei K-Vektorräume. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für jede lineare Abbildung $f : V \to W$ und jede endliche geordnete Teilmenge $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(v_i) \qquad \text{für alle } \lambda_i \in K.$$

Übung 7.5 (2 Punkte)

1. Zeigen Sie sorgfältig, dass $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist.

2. Konstruieren Sie eine injektive $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung von $\mathbb{Q}^2$ nach $\mathbb{R}$.

Übung 7.6 (3 Punkte)

Sei K ein Körper.

1. Zeigen Sie, dass die Menge $K[t] = \{\, a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \mid a_i \in K \,\}$ der Polynome über K ein K-Vektorraum ist.

2. Zeigen Sie, dass die formale Differenzierung $\mathsf{diff} : \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k k t^{k-1}$ eine lineare Abbildung ist.

3. Bestimmen Sie Bild und Kern von diff.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 4.12.2023.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.