Julian Holstein
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (Bachelor)
Sommersemester 2024

Blatt 1

Übung 1.1 (4 Punkte)

1. Seien $A_1, \ldots, A_n$ Endomorphismen eines endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeigen Sie, dass $A = A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$ genau dann invertierbar ist, wenn alle A_i invertierbar sind.

2. Geben Sie ein Gegenbeispel zur Aussage aus 1. für einen unendlich-dimensionalen Vektorraum W.

Übung 1.2 (5 Punkte)

Berechnen Sie das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. ... mit dem Gaußverfahren,

2. ... mit der Formel aus Satz 7.4.5.

Übung 1.3 (6 Punkte)

1. Beweisen Sie die Cramersche Regel. *Hinweis:* Zeigen Sie zuerst, dass $\det(A_{ji}^{Str})$ die Determinante der Matrix ist, die wir aus A erhalten, indem wir die i-te Spalte durch den Einheitsvektor e_j ersetzen.

2. Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit $b \in \mathbb{Z}^n$ und $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$, das heißt alle Einträge sind ganze Zahlen. Nehmen wir an, dass $\det(A) \in \{-1, +1\}$.

   Zeigen Sie, dass alle Koordinaten des Lösungsvektors x ganze Zahlen sind.

Übung 1.4 (4 Punkte)

Erinnern wir uns, dass eine Matrix A orthogonal heißt, wenn $AA^T = E_n$ ist. Bestimmen Sie die möglichen Determinanten einer orthogonalen Matrix. Können Sie eine geometrische Interpretation Ihrer Antwort geben?

Übung 1.5 (1 Punkt)

* Seien $a_i \in K$ für $i = 1, \dots, n$.

Berechnen Sie die folgende Determinante einer $(n \times n)$-Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Abgabetermin ist die Vorlesung am 8.4.2024.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.