Julian Holstein


# Blatt 2

## Übung 2.1 (2 Punkte)

Sei $n \geq 2$ und $\tau_0$ die Transposition, die 1 und 2 vertauscht,

$$\tau_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{bmatrix}$$

Dann ist jede andere Transposition $\tau \in S_n$ zu $\tau_0$ konjugiert, d.h. es gibt ein $\sigma \in S_n$, so dass $\tau = \sigma\tau_0\sigma^{-1}$ gilt.

## Übung 2.2 (6 Punkte)

Diese Übung gibt Zeine alternative Beschreibung des Signums. Zeigen Sie, dass

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

einen Gruppenhomomorphismus $\epsilon : S_n \to \{-1, +1\}$ definiert so dass $\epsilon(\tau) = -1$ ist für jede Transposition $\tau$.

*Hinweis:* Um zu zeigen, dass ein Homomorphismus vorliegt schreiben Sie $\epsilon(\tau \circ \sigma)$ als $\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$ und zerlegen dann den ersten Faktor in das Produkte der Faktoren mit $\sigma(i) > \sigma(j)$ und der Faktoren mit $\sigma(j) > \sigma(i)$.

## Übung 2.3 (6 Punkte)

Sei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie für jedes $i = 1, 2, 3$ einen $i$-reihigen Minor an, der gleich 0 ist, und einen der nicht 0 ist, oder geben an, warum das nicht möglich ist.

## Übung 2.4 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Spur zyklisch invariant ist: Für Matrizen $A_1, A_2, \dots, A_k \in M(n \times n, K)$ gilt $\mathrm{Tr}\,(A_1 A_2 \cdots A_k) = \mathrm{Tr}\,(A_k A_1 \cdots A_{k-1})$.

2. Zeigen Sie, dass für Matrizen $A_1, A_2, \ldots, A_k \in M(n \times n, K)$ und Permutationen $\sigma \in S_n$ immer gilt $\det(A_1 A_2 \cdot A_n) = \det(A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(n)})$.

3. Seien $A, B, C \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass $\mathrm{Tr}\,(ABC) \neq \mathrm{Tr}\,(ACB)$ sein kann.

**Übung 2.5 (1 Punkt)**

* Finden Sie alle linearen Abbildungen $f : M(n \times n, K) \to K$ mit der Eigeschaft $f(AB) = f(BA)$ für alle $A, B \in M(n \times n, K)$.

**Abgabetermin ist die Vorlesung am 15.4.2024.**

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.