Blatt 5

Übung 5.1 (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring. Betrachten Sie die folgende alternative Definition:

Ein R-Algebra ist ein Quadrupel $(A, +, \circ, \cdot)$ bestehend aus einer Menge A und Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + \quad & A \times A \to A \\ \circ \quad & A \times A \to A \\ \cdot \quad & R \times A \to A \end{aligned}$$

so dass gilt:

(A1) $(A, +, \circ)$ ist ein Ring.

(A2) Für alle $v, w \in A$ und $r, s \in R$ gilt

$$\begin{aligned} (r+s) \cdot v &= r \cdot v + s \cdot v \\ r \cdot (v+w) &= r \cdot v + r \cdot w \\ (rs) \cdot v &= r \cdot (s \cdot v) \\ 1 \cdot v &= v \end{aligned}$$

(A3) Für alle $v, w \in A$ und $r, s \in R$ gilt

$$(r \cdot v) \circ (s \cdot w) = (rs) \cdot (v \circ w) .$$

Zeigen Sie, dass dies äquivalent zu der Definition aus der Vorlesung ist, d.h. jede R-Algebra im Sinne der Vorlesung ist eine R-Algebra im Sinne dieser Übung und umgekehrt.

Übung 5.2 (3 Punkte)

Geben Sie eine Matrix $A \in M(6 \times 6, K)$ mit drei verschiedenen Eigenwerten a, b, c an, so dass

$$\mu_{geo}(A, a) = \mu_{geo}(A, b) = \mu_{geo}(A, c)$$

und

$$\mu_{alg}(A, a) > \mu_{alg}(A, b) > \mu_{alg}(A, c).$$

Übung 5.3 (5 Punkte)

Sei

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Eigenwerte mit ihrer algbraischen und geometrische Vielfachheit.

Übung 5.4 (3 Punkte)

Sei $A \in M(n \times n, K)$. Vergleiche die Eigenwerte und ihre algebraischen und geometrische Vielfachheiten von A und A^T.

Übung 5.5 (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring ohne Nullteiler. Konstruieren Sie einen Körper K und einen injektiven Ringhomomorphismus $R \to K$. *Hinweis:* Betrachten Sie zuerst den Fall $R = \mathbb{Z}$.

Zeigen Sie, dass jeder Körper Unterkörper eines unendlichen Körpers ist.

Übung 5.6 (1 Punkt)

* Sei K ein Körper, und $p, r, s \in K[X]$.

Ein Polynom p heißt *irreduzibel*, wenn aus $p = rs$ folgt, dass r oder s Elemente von $K \setminus \{0\}$ sind. Ein Polynom p heißt *prim*, wenn aus $p \mid rs$ folgt, dass $p \mid r$ oder $p \mid s$ gilt.

Zeigen sie, dass p genau dann prim ist, wenn es irreduzibel ist.

Zeigen Sie, dass jedes Polynom Produkt von Primpolynomen ist, und diese Faktorisierung eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren und die Multiplikation mit Konstanten ist.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 6.5.24.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.