Julian Holstein
Lineare Algebra und Analytische Geometrie II (Bachelor)
Sommersemester 2024

Blatt 7

Übung 7.1 (2 Punkte)

Prüfen Sie das Cayley-Hamilton Theorem für Matrizen in $M(2\times 2, K)$ durch eine explizite Rechnung.

Übung 7.2 (4 Punkte)

Sei A eine Matrix mit $P_A = (X-2)^5 X$. Was sind die möglichen Minimalpolynome für A? Was sind die möglichen jordanschen Normalformen von A? Ordnen Sie jeder jordanschen Normalform das Minmialpolynom zu.

Übung 7.3 (5 Puntke)

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ mit jordanscher Normalform F.

1. Beschreiben Sie die jordansche Normalform von A^T gegeben F.
2. Sei A invertierbar. Beschreiben Sie die jordansche Normalform von A^{-1} gegeben F.

Übung 7.4 (3 Punkte)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = n$ und sei $p : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $p^2 = p$. Zeigen Sie, dass eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, so dass $M_{\mathcal{B}}(p)$ eine block-diagonale Matrix der folgenden Form ist

$$M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} E_r & \\ & 0_{n-r} \end{pmatrix} \in M(n \times n, K)$$

Übung 7.5 (5 Punkte)

Seien g, h zwei nilpotente Endomorphismen eines K-Vektorraums V.

1. Zeigen Sie, dass auch $g + h$ nilpotent ist, wenn g und h kommutieren.
2. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass $g + h$ nicht nilpotent sein muss, wenn g und h nicht kommutieren.
3. Sei $K = \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass ein Endomorphismus f genau dann nilpotent ist, wenn alle Eigenwerte 0 sind.

Übung 7.6 (1 Punkt)

* Betrachten Sie den Ring der formalen Potenzreihen $K[[X]]$, der analog zum Polynomring $K[X]$ definiert ist, aber ohne die Einschränkung, dass nur endlich viele Koeffizienten ungleich 0 sind.

Beachten Sie, dass im Gegensatz zu $K[X]$ zahlreiche Elemente von $K[[X]]$ Inverse haben, zum Beispiel ist $\frac{1}{1-X} = \sum_{i=0}^{\infty} X^i$. Auch unendliche Produkte können in $K[[X]]$ wohldefiniert sein, solange wir den Koeffizienten für jedes X^i als endliche Summe bestimmen können.

Sei nun $p(n)$ die Anzahl aller möglichen jordanschen Normalform für eine Matrix mit charakteristischem Polynom $(X-\lambda)^n$. (Mit $p(0) = 1$.)

Beweisen Sie die folgende Identität in $K[[X]]$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) X^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-X^k}$$

Sei nun $p_k(n)$ die Anzahl der jordanschen Normalformen einer Matrix mit $P_A = (X-\lambda)^n$, die genau k Jordan-Blöcke haben, und $p^k(n)$ die Anzahl der jordanschen Normalformen einer Matrix mit $P_A = (X-\lambda)^n$, deren größter Jordan-Block Größe k hat.

Zeigen Sie, dass $p_k(n) = p^k(n)$ gilt.

Zeigen Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_k(n) X^n = \frac{X^k}{(1-X)\cdots(1-X^k)}.$$

Beweisen Sie die Identität

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-YX^i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Y^k X^k}{(1-X)\cdots(1-X^k)}.$$

Abgabetermin ist die Vorlesung am 27.5.24.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.