Julian Holstein

Blatt 9

Übung 9.1 (9 Punkte)

1. Formulieren und beweisen Sie eine universelle Eigenschaft für den Kern eines Gruppenhomomorphismus $f : G \to H$.
2. Beweisen Sie die universelle Eigenschaft des Produkts von Vektorräumen aus Beispiel 11.0.8.
3. Sei I eine Menge und $\{V_i\}_{i\in I}$ eine Familie von Vektorräumen. Konstruieren Sie eine injektive Abbildung $\oplus_{i\in I} V_i \to \prod_{i\in I}$ und zeigen, dass diese nicht surjektiv sein muss.

Übung 9.2 (3 Punkte)

Finden Sie die duale Basis zu den folgenden Basen:

1. $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ für $V = \mathbb{R}^4$.
2. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ für $V = \mathbb{Q}^4$.
3. $\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix} \right)$ für $V = \mathbb{C}^4$.

Übung 9.3 (4 Punkte)

Sei P_3 der Vektorraum aller Polynome in $\mathbb{R}[X]$ mit Grad kleiner gleich 3. Sei für $x \in \mathbb{R}$ die lineare Abbildung ϵ_x durch den Einsetzungshomomorphismus $\epsilon_x : p \mapsto p(x)$ definiert.

1. Zeigen Sie, dass $\epsilon_{-1,}, \epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2$ eine Basis für $(P_3)^*$ ist.
2. Was ist die duale Basis für P_3?

3. Was ist der Annulator der konstanten Polynome?

4. Was ist der Annulator der Menge aller Polynome mit Grad kleiner gleich 2?

Übung 9.4 (3+1 Punkte)

Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien $f_1, \ldots, f_n, g \in V^*$. Zeigen Sie, dass $g \in \text{span}_K(f_1, \ldots, f_n)$ genau wenn $\cap_{i=1}^n ker(f_i) \subset ker(g)$.

* Gilt dies auch, wenn V unendlich-dimensional ist?

Abgabetermin ist die Vorlesung am 10.6.24.

Begründen Sie all Ihre Antworten!

Geben Sie bitte zu zweit ab und achten darauf, dass jede*r ungefähr die Hälfte der Aufgaben aufschreibt, also mindestens 8 Punkte.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.