Blatt 0 (Präsenzübung)

Übung 0.1 Einheitssphären

Erinnern Sie sich an die Metriken d_i auf $\mathbb{R}^n$ für $i = 1, 2, \infty$ mit

$$d_1(x, y) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

$$d_2(x, y) \coloneqq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

$$d_\infty(x, y) \coloneqq \max_{j=1,\ldots,n} |x_j - y_j| , \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n .$$

Skizzieren sie die Einheitssphären $\partial B_1(0) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, d_i(x, 0) = 1\}$ für $i = 1, 2, \infty$ und $n = 2$.

Übung 0.2 Geomatikum-Metrik

Wir definieren für $a, b \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{*\}$ die folgende Metrik: $d(a, b) = |b - a|$ wenn $a - b$ gerade ist. $d(a, b) = |b + a|$ wenn $a - b$ ungerade ist. Sowie $d(a, *) = d(*, a) = a$ und $d(*, *) = 0$.

Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist.

Warum könnte man sie als Geomatikum-Metrik bezeichnen? Wie könnte man die Metrik noch realistischer machen?

Übung 0.3 Definition von Metriken

Zeigen Sie, dass $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik definiert, wenn gilt:

1. $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in X$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ für alle $x, y, z \in X$.

Übung 0.4 Besondere Dreiecksungleichung

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, in dem wir aber die Dreiecksungleichung durch die Eigenschaft ersetzen, dass für alle $x, y, z \in X$

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} . \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

Zeigen Sie, dass für alle $r > 0$ und $x \in X$ der Ball $B_r(x)$ zugleich offen und abgeschlossen ist.

Können Sie ein Beispiel für eine Metrik mit der obigen Eigenschaft angeben?

Übung 0.5 Metriken auf Produkten

(a) Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Beweisen Sie, dass

$$
\begin{aligned}
d'\big((x_1, x_2), (x_1', x_2')\big) &\coloneqq d_1(x_1, x_1') + d_2(x_2, x_2')\,, \\
d''\big((x_1, x_2), (x_1', x_2')\big) &\coloneqq \sqrt{d_1(x_1, x_1')^2 + d_2(x_2, x_2')^2}\,, \\
d'''\big((x_1, x_2), (x_1', x_2')\big) &\coloneqq \max\{d_1(x_1, x_1'), d_2(x_2, x_2')\} \quad \forall\, x_1, x_1' \in X_1\,,\ x_2, x_2' \in X_2
\end{aligned}
$$

Metriken auf der Produktmenge $X_1 \times X_2$ definieren.

(b) Es sei $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie von metrischen Räumen. Warum können die Definitionen aus Teil (a) nicht einfach übertragen werden, um auf $X \coloneqq \prod_{n \geq 0} X_n$ eine Metrik zu erhalten?

Zeigen Sie, dass

$$
d(x, x') \coloneqq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, x_n')}{1 + d_n(x_n, x_n')}
$$

eine Metrik auf dem Produkt $\prod_{n \geq 0} X_n$ definiert. Hierbei sind $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $x' = (x_n')_{n \in \mathbb{N}}$ Elemente aus X.