Blatt 3

Übung 3.1 (2+3 Punkte)

(a) Es sei X eine Menge und $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X. Zeigen Sie folgende Aussage:

Die Menge $\mathcal{B}$ ist eine Basis für eine Topologie auf X genau dann, wenn $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$ und wenn für jedes Paar $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in U_1 \cap U_2$ ein $U \in \mathcal{B}$ existiert, sodass $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

(b) Beweisen Sie, dass die koendliche Topologie auf einer überabzählbaren Menge X keine abzählbare Basis besitzt.

Übung 3.2 (2+2+1+1 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Wir schreiben zur besseren Lesbarkeit $cl(A) = \overline{A}$ und $int(A) = \mathring{A}$.

Zeigen Sie:

(a) $cl(cl(A)) = cl(A)$ und $int(int(A)) = int(A)$. Aus $A \subset B$ folgen $cl(A) \subset cl(B)$ und $int(A) \subset int(B)$.

(b) $cl(int(cl(int(A)))) = cl(int(A))$.

(c) $int(cl(int(cl(A)))) = int(cl(A))$.

(d) * Finden Sie A und X so dass durch wiederholte Anwendung von cl und int auf A möglichst viele verschiedene Teilmengen entstehen.

Übung 3.3 (1+3 Punkte)

Sei $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ eine Abbildung von topologischen Räumen.

(a) Wir haben in Satz 1.9.4.2 gezeigt, dass f stetig ist, wenn f folgenstetig ist und X AZ1 erfüllt. Finden Sie einen alternativen Beweis für diese Aussage, indem Sie das Urbild einer abgeschlossenen Menge betrachten und Korollar 1.9.5 verwenden.

(b) Es sei nun $(X, \mathcal{T}) = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ und $(X', \mathcal{T}') = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{disc}})$, wobei

$$\mathcal{T}_c \coloneqq \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R} \backslash E \mid E \subset \mathbb{R} \text{ abzählbar oder endlich}\}$$

und $\mathcal{T}_{\text{disc}}$ die diskrete Topologie ist.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_c$ eine Topologie definiert.

Zeigen Sie, dass $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{T}_c) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{disc}})$, $x \mapsto x$ überall folgenstetig, aber nirgends stetig ist.

(Hinweis: Betrachten Sie für eine Folge (x_n) in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_c)$ die Menge $E := \{x_n \mid n \in \mathbb{N} : x_n \neq x\}$.)

Übung 3.4 (2+2+1 Punkte)

Wir betrachten $S^1 \times S^1 = \{z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 = |z_2|^2 = 1\}$ mit der Unterraumtopologie in $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Aus der Vorlesung wissen wir dass dies äquivalent zu $S^1 \times S^1$ mit der Produkttopologie ist.

Es seien $0 < r < R$ reelle Zahlen, und es sei $\mathbb{T}^2$ die Rotationsfläche, die entsteht, wenn man die Kreislinie $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - R)^2 + z^2 = r^2\}$ um die z-Achse rotieren lässt.

(a) Zeigen sie, dass es einen Homöomorphismus $S^1 \times S^1 \cong \mathbb{T}^2$ gibt.

(b) Betrachten Sie für $p, q \in \mathbb{R}$ die Kurve $\gamma_{p,q}\colon \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$, $t \mapsto \big(\exp(2\pi\,\mathrm{i}\,pt), \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,qt)\big)$. Wann ist $\gamma_{p,q}$ injektiv?

(c) Skizzieren Sie das Bild der Kurve $\gamma_{2,3}$ in $\mathbb{T}^2$ für $r = 1$ und $R = 2$.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 5.11.2019.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.