# Blatt 5

## Übung 5.1 (1+2 Punkte)

Ein topologischer Raum heißt *regulär* wenn folgende Eigenschaft gilt: Zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Teilmenge $A \subset X$, die den Punkt $x$ nicht enthält, gibt es disjunkte offene Mungen $x \in U \subset X$ und $A \subset V \subset X$ mit $U \cap V = \emptyset$.

(a) Geben Sie ein Beispiel, für einen regulären Raum, der nicht Hausdorff ist.

(b) Zeigen Sie, dass $X$ genau dann regulär ist, wenn für jedes $x \in X$ die abgeschlossenen Umgebungen, die $x$ enhalten, eine Umgebungsbasis bilden.

Warnung zur Literatur: In dieser Konvention heißt ein regulärer Hausdorff-Raum auch T3-Raum. (Zur Erinnerung: ein Hausdorffscher Raum ist T2.) Diese Konvention findet sich in Wikipedia. Es findet sich allerdings in anderen Quellen (von Querenburg, Laures-Szymik) die genau umgekehrte Konvention: Dann bedeutet regulär automatisch Hausdorff, und T3 ist die oben definierte Eigenschaft ohne Annahme von Hausdorff.

## Übung 5.2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass keine zwei der folgenden topologischen Räume homöomorph sind:
$[0,1]$, $[0,1)$, $(0,1)$ und $\mathbb{S}^1$.
In der Vorlesung haben wir schon gesehen, dass $S^1$ nicht homöomorph zu $[0,1)$ ist.

## Übung 5.3 (3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{Q}$ (mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie).

(b) Geben Sie ein Beispiel für einen Unterraum $A$ eines topologischen Raumes $X$, so dass $A$ (mit der Untaraumtopologie) zusammenhängend ist, aber das Innere von $A$ nicht zusammenhängend ist.

(c) Finden Sie zusammenhängend Unterräume $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum $X$, so dass immer $A_{i+1} \subset A_i$ gilt und $\cap A_i$ nicht leer und nicht zusammenhängend ist.

## Übung 5.4 (2+3 Punkte)

Es sei $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})_{i \in I}$ eine Familie nicht-leerer topologischer Räume und $(X, \mathcal{T}_X)$ ihr Produkt, versehen mit der Produkttopologie.

(a) Beweisen Sie, dass das Produkt $(X, \mathcal{T}_X)$ genau dann wegzusammenhängend ist, wenn der Raum $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})$ für jedes $i \in I$ wegzusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Produkt $(X, \mathcal{T}_X)$ genau dann zusammenhängend ist, wenn der Raum $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})$ für jedes $i \in I$ zusammenhängend ist.

**Übung 5.5 (3+2 Punkte)**

Matrizengruppen werden mit der Unterraumtopologie des umgebenden Matrizenrings $\mathsf{M}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$ zu topologischen Räumen. Hier ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathsf{SU}(2)$ der speziellen unitären $(2\times2)$-Matrizen mit der Unterraumtopologie des $\mathsf{M}_2(\mathbb{C})$ homöomorph zur 3-Sphäre $S^3$ ist.

Beschreiben Sie den topologischen Raum $\mathsf{O}(2)$ der (reellen) orthogonalen $(2 \times 2)$-Matrizen.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathsf{O}(n)$, die Gruppe der orthogonalen $(n\times n)$-Matrizen, für kein $n \in \mathbb{N}$ zusammenhängend ist.

* Beweisen Sie außerdem, dass die Gruppe $\mathsf{U}(n)$ der unitären $(n\times n)$-Matrizen zusammenhängend ist.

**Abgabetermin ist die Vorlesung am 19.11.2019.**

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.