Blatt 7

Übung 7.1 (3+1+1+1+1 Punkte)

Wir konstruieren eine Topologie auf $X = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Hier ist ∞ ein Platzhalter für einen neuen, "unendlich fernen" Punkt, den wir zu $\mathbb{R}^n$ hinzufügen.

Sei $\mathcal{T}$ definiert wie folgt.

- $U \subset \mathbb{R}^n \subset X$ ist in $\mathcal{T}$, wenn $U \in \mathcal{T}_{eucl}$
- $U = U' \cup \{\infty\} \subset X$ ist in $\mathcal{T}$, wenn $\mathbb{R}^n \setminus U'$ kompakt ist (mit der Unterraumtopologie von $\mathcal{T}_{eucl}$).

(a) Prüfen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X definiert.

(b) Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ kompakt ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff ist.

(d) Ist $(X, \mathcal{T})$ homöomorph zu einem Ihnen bekannten topologischen Raum?

(e) * Zeigen Sie, dass es für jeden lokal kompakten Hausdorff-Raum X einen kompakten Hausdorff-Raum $X^+ = (X \cup \{\infty\}, \mathcal{T})$ gibt, der eindeutig bis auf Homöomorphismus ist.

Übung 7.2 (3 Punkte)

Es sei X eine Menge und F ein Filter auf X. Beweisen Sie, dass F genau dann ein Ultrafilter auf X ist, wenn er die folgende Eigenschaft besitzt: Für alle Teilmengen $A, B \subset X$ gilt

$$A \cup B \in F \quad \Longrightarrow \quad A \in F \text{ oder } B \in F\,.$$

Übung 7.3 (3 Punkte)

Sei X ein topologischer Raum und I eine Menge.

Zeigen Sie, dass $\prod_I X \cong \mathrm{Map}(I, X)$.

Hier fassen wir auf der rechten Seite I als diskreten topologischen Raum auf; $\mathrm{Map}(I, X)$ hat die KO-Topologie.

Übung 7.4 (2+2+1+1+1 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring. Ein *Ideal* in R ist eine Teilmenge $I \subset R$, für die gilt:

1. I ist eine Gruppe unter der Einschränkung der Addition von R
2. für jedes $x \in I$ und jedes $r \in R$ ist das Produkt $r \cdot x$ wieder in I.

Ein Ideal $\mathfrak{p} \neq R$ ist ein *Primideal* wenn für $r, s \in R$ mit $r \cdot s \in \mathfrak{p}$ gilt, dass $r \in \mathfrak{p}$ oder $s \in \mathfrak{p}$. Man definiert das *Spektrum von* R als Menge aller Primideale von R. Wir schreiben $Spec(R)$.

Wir wollen nun die $Spec(R)$ mit einer Topologie versehen. Zu diesem Zweck definieren wir zunächst für ein beliebiges Ideal $I \subset R$ die Menge

$$A(I) \coloneqq \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \,|\, I \subset \mathfrak{p}\}\,.$$

Lassen wir I über alle Ideale in R laufen, so erhalten wir eine Familie $A_R = \{A(I)\}_{I \subset R}$ von Teilmengen von $Spec(R)$, und wir definieren diese Mengen als abgeschlossen.

(a) Zeigen Sie, dass für beliebige Familien $(I_j)_{j \in J}$ von Idealen in R gilt, dass $\bigcap_{j \in J} A(I_j) = A(\sum_{j \in J} I_j)$, wobei $\sum_{j \in J} I_j$ das Ideal ist, das aus allen endlichen Summen von Elementen aus den I_j besteht.

(b) Zeigen Sie, dass $A(I_1) \cup A(I_2) = A(I_1 \cdot I_2)$, wobei $I_1 \cdot I_2$ das von Produkten aus I_1 und I_2 erzeugte Ideal ist.

(c) Beweisen Sie nun, dass A_R eine Topologie auf der Menge $Spec(R)$ definiert.

(d) Was sind die abgeschlossenen Teilmengen von $Spec(\mathbb{Z})$ in der Zariski-Topologie? Was ist der Abschluss des Nullideals?

(e) * Wann ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ ein abgeschlossener Punkt in der Zariski Topologie?

Betrachten Sie die Zariski-Topologie auf $Spec(B)$ wobei $B = \mathbb{R}[X, Y]$ der Polynomring mit zwei Variablen ist. Finden Sie eine Kette von vier abgeschlossenen Teilmengen $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3$, und finden Sie drei Punkte x_1, x_2, x_3 mit $\overline{\{x_i\}} = A_i$.

Veranschaulichen Sie mit einem Bild. Finden Sie hierfür abgeschlossene Punkte von $Spec(B)$, die den Punkten der Ebene $\mathbb{R}^2$ entsprechen. Enthält Ihr Bild alle abgeschlossenen Punkte von $Spec(B)$?

Abgabetermin ist die Vorlesung am 3. Dezember.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.