Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Julian Holstein
Topologie (Bachelor)
Wintersemester 2019/20

Blatt 8

Übung 8.1 (2+2 Punkte)

(a) Wir haben eine partielle Ordnung zweimal definiert, vgl. Beispiel 1.21.5.

Zeigen Sie, dass es eine natürliche Korrespondentz zwischen partiellen Ordnungen als Kategorien und als Relationen gibt.

(b) Wir erinnern uns an den Vergessfunktor $V : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ der jeden topologischen Raum auf die zugrundelegende Menge abbildet.

Definieren Sie zwei verschiedene Funktoren L und R von **Set** nach **Top** so dass für jede Menge M und jeden topologischen Raum X gilt: $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(LM, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(M, VX)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(VX, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, RM)$.

Übung 8.2 (1+1+1+2 Punkte)

(a) Betrachten Sie das Diagramm $\mathbb{R} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} \mathbb{R} \xleftarrow{f} \mathbb{R}$ in **Set** wobei f eine beliebige Funktion ist. Was ist der Limes?

(b) Eine Äquivalenzrelation auf A ist insbesondere eine Untermenge $R \subset A \times A$. Dies gibt zwei Abbildungen von R nach A und damit ein Diagramm $R \rightrightarrows A$ in **Set** über $\bullet \rightrightarrows \bullet$. Zeigen Sie, dass der Kolimes von $R \rightrightarrows A$ die Menge der Äquivalenzklassen von R ist.

(c) Zeigen Sie, dass wir einen Limes über $\bullet \rightrightarrows \bullet$ auch als Limes über eine partielle Ordnung J ausdrücken können.

(d) Sei $D : I \to \mathbf{Set}$ ein beliebiges Diagramm. Zeigen Sie, dass

$$\lim_I D \cong \left\{ (d_i) \in \prod_i D(i) \mid d_j = D(f)(d_i) \quad \forall f : i \to j \right\}$$

Übung 8.3 (2+1+1+1 Punkte)

(a) Erinnern Sie sich an den Quotienten X/A für einen topologischen Raum X mit Untermenge A. Wie lässt sich X/A als Kolimes ausdrüken? Was ist der Quotient $X/\emptyset$ und warum?

(b) Betrachten Sie $S^\infty = \mathrm{colim}\, S^n$ wie in der Vorlesung. Identifizieren Sie für jedes n einen Unterraum, der homöomorph zu S^n ist (in der Folge als S^n bezeichnet). Zeigen Sie, dass $A \subset S^\infty$ abgeschlossen ist, genau wenn alle $A \cap S^n$ abgeschlossen sind.

(c) Betrachten Sie das Diagramm

$$\cdots \subset B_{1/4}(0) \subset B_{1/3}(0) \subset B_{1/2}(0) \subset B_1(0)$$

über $(\mathbb{N}, \geq)$. Was ist der Limes?

(d) * Betrachten Sie das Bouquet $X_n := \vee_{i=1}^n S^1$ mit einem gemeinsamen Grundpunkt. Wir haben Projektionen

$$X_{n+1} := \vee_{i=1}^{n+1} S^1 = \vee_{i=1}^n S^1 \vee S^1 \to X_n := \vee_{i=1}^n S^1 ,$$

die die $(n+1)$-te Schlaufe auf den gemeinsamen Grundpunkt abbildet.

Ist $X = \lim X_i$ homöomorph zur unendlichen Einpunktvereinigung $\vee_{i=1}^\infty S^1 = \amalg_{i=1}^\infty S^1/_\sim$, wobei $\sim$ alle Grundpunkte identifiziert?

Übung 8.4 (2+1+1+1+1 Punkte)

In dieser Übung beweisen wir den Fortsetzungssatz von Tietze, eine wichtige Konsequenz von Urysohns Lemma.

Sei X ein normaler Raum, sei $A \subset X$ abgeschlossen und sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) Nehmen wir zuerst an, dass f beschränkt ist und $f(A) \subset [-1, 1]$. Finde eine Funktion G_1, die 0 auf $f^{-1}([-1, -\frac{1}{3}])$ und 1 auf $f^{-1}([\frac{1}{3}, 1])$ ist.

(b) Definiere $F_1 := \frac{2}{3}G_1 - \frac{1}{3}$ und zeige $\begin{cases} |f(x) - F_1(x)| \leq \frac{2}{3} & \text{für alle } x \in A \\ |F_1(x)| \leq \frac{1}{3} & \text{für alle } x \in X . \end{cases}$.

(c) Durch Betrachtung von $f^{(1)} = f - F_1 : A \to [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ konstruiere eine Funktion $F_2 : X \to \mathbb{R}$ mit $\begin{cases} |f^{(1)}(x) - F_2(x)| \leq (\frac{2}{3})^2 & \text{für alle } x \in A \\ |F_2(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} & \text{für alle } x \in X . \end{cases}$

(d) Definieren Sie induktiv eine Folge $(F_n)_n \in \mathbb{N}$ so dass

$$\begin{aligned} |f(x) - \textstyle\sum_{i=1}^n F_i(x)| &\leq (\tfrac{2}{3})^n \quad \text{für alle} \quad x \in A \\ |F_n(x)| &\leq \tfrac{1}{3} \cdot (\tfrac{2}{3})^{n-1} \quad \text{für alle} \quad x \in X . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es eine stetige Funktion F auf X gibt mit $F|_A = f$.

(e) * Beweisen Sie die Aussage nun für den Fall, dass f nicht beschränkt ist.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 10. Dezember.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.