Julian Holstein
Topologie (Bachelor)
Wintersemester 2021/22

Blatt 2

Übung 2.1 (1+1+1 Punkte)

Wir definieren eine Topologie auf der Menge $S = \{0, 1\}$ mit den offenen Mengen $\emptyset$, $\{1\}, \{0, 1\}$.

(a) Prüfen Sie, dass dies tatsächlich eine Topologie ist.

(b) Finden Sie eine stetige surjektive Funktion von $[0, 1]$ nach S.

(c) Für einen beliebigen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, was sind die stetigen Funktionen $X \to S$?

Übung 2.2 (2 +1 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen genau dann stetig ist, wenn sie in jedem Punkt stetig ist.

2. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir haben, in der Vorlesung gezeigt, dass die offenen Mengen, die durch die Metrik induziert werden, eine Topologie auf X definieren. Betrachten Sie den Bewis sorgfältig. Wo ging die Dreiecksungleichung ein?

Übung 2.3 (2+2+1 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$. Wir sagen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in X$ *konvergiert* gegen $x \in X$ wenn es zu jeder Umgebung U von x ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

(a) Zeigen Sie, dass $x_n \to x$ im topologischen Sinne (Definition 1.7.10) genau dann, wenn $x_n \to x$ im metrischen Sinne, also $d(x_n, x) \to 0$.

(b) Welches sind die konvergenten Folgen in der diskreten Topologie? Welches die in der indiskreten Topologie?

(c) Welche Bedingung muss eine Topologie erfüllen, damit Grenzwerte aller Folgen, sofern existent, eindeutig sind?

Übung 2.4 (2+2 Punkte)

Es seien $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, M eine Menge und $f \colon X \to M$ eine beliebige Abbildung.

(a) Beschreiben Sie die feinste Topologie $\mathcal{T}_M^f$ auf M, für die f stetig ist.

(b) Beweisen Sie, dass die Topologie $\mathcal{T}_M^f$ die folgende universelle Eigenschaft: Für jeden topologischen Raum $(Z, \mathcal{T}_Z)$ ist eine Abbildung $\varphi\colon (M, \mathcal{T}_M^f) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ genau dann stetig, wenn die Komposition $\varphi \circ f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ stetig ist.

Übung 2.5 (2+1+1+1 Punkte)

Wir definieren eine Topologie auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Offen sind alle Vereinigungen von Mengen $A_{a,b} = \{an + b \mid n \in \mathbb{Z}\}$ für ganze Zahlen a und b, wobei $a \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass dies eine Topologie auf $\mathbb{Z}$ definiert.

Um zu zeigen, dass der Schnitt von zwei offenen Mengen offen ist, betrachten Sie $x \in A_{a,b} \cap A_{c,d}$ und finden Sie ein $A_{y,z}$, das x enthält.

(b) Zeigen Sie, dass jede Menge $A_{a,b}$ auch abgeschlossen ist.

(c) Betrachten Sie die Mengen $A_{p,0}$ für Primzahlen. Was ist $\mathbb{Z} \setminus \cup_{p \text{ prim}} A_{p,0}$?

(d) * Folgern Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 26.10.2019.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.