Julian Holstein
Topologie (Bachelor)
Wintersemester 2021/22

Blatt 3

Übung 3.1 (2+2+1 Punkte)

(a) Es sei X eine Menge und $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ eine Teilmenge der Potenzmenge von X. Zeigen Sie folgende Aussage:

Die Menge $\mathcal{B}$ ist eine Basis für eine Topologie auf X genau dann, wenn $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$ und wenn für jedes Paar $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in U_1 \cap U_2$ ein $U \in \mathcal{B}$ existiert, sodass $x \in U \subseteq U_1 \cap U_2$.

(b) Zeigen Sie dass $\mathbb{R}^1$ eine abzählbare Basis hat. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^n$ für jedes n eine abzählbare Basis hat.

(c) * Geben Sie eine nicht-diskrete Topologie an, die keine abzählbare Basis zulässt.

Übung 3.2 (2+1+1 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $A \subset X$. Wir schreiben zur besseren Lesbarkeit $cl(A) = \overline{A}$ und $int(A) = \mathring{A}$.

Zeigen Sie:

(a) $cl(cl(A)) = cl(A)$ und $int(int(A)) = int(A)$. Aus $A \subset B$ folgen $cl(A) \subset cl(B)$ und $int(A) \subset int(B)$.

(b) $cl(int(cl(int(A)))) = cl(int(A))$.

(c) * Finden Sie A und X so dass durch wiederholte Anwendung von cl und int auf A möglichst viele verschiedene Teilmengen entstehen.

Übung 3.3 (2+1+3 Punkte)

Es sei wie zuvor $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Wir nehmen an, dass die Topologien $\mathcal{T}_{X_i}$ nicht indiskret sind. Auf der Menge $X := \prod_{i \in I} X_i$ definieren wir eine Topologie, indem wir für eine Basis den "naiven" Produktansatz

$$\mathcal{B}_{\text{Box}} := \Big\{ \prod_{i \in I} U_i \,\Big|\, U_i \in \mathcal{T}_{X_i} \Big\}$$

verwenden.

(a) Überzeugen sie sich, dass $\mathcal{B}_{\text{Box}}$ die Basis einer Topologie auf X ist. Diese Topologie wird als *Boxtopologie* $\mathcal{T}_{\text{Box}}$ auf X bezeichnet. Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}_{\text{Box}}$ feiner ist als die

Produkttopologie $\mathcal{T}_X$, und dass $\mathcal{T}_{\text{Box}} = \mathcal{T}_X$ genau dann, wenn die Indexmenge I endlich ist.

(b) Wir nehmen nun an, dass die Indexmenge I nicht endlich ist. Überlegen Sie sich, dass die Projektionsabbildung $\mathrm{pr}_i\colon (X, \mathcal{T}_{\text{Box}}) \to (X_i, \mathcal{T}_{X_i})$ für jedes $i \in I$ stetig ist, und zeigen Sie, dass $(X, \mathcal{T}_{\text{Box}})$ nicht die universelle Eigenschaft der Initialtopologie bezüglich dieser Abbildungen erfüllt.

(c) Es sei nun $I = \mathbb{N}$ und $X_n = \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}$ die Menge der reellen Folgen. Es sei $X^+ := \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_{>0} \subset X$ die Menge der positiven reellen Folgen, wobei $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}$ die Menge der positiven reellen Zahlen ist. Bezeichne mit $\hat{0} \in X$ das Element von X mit $\hat{0}_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass $\hat{0}$ im Abschluss von X^+ liegt, sowohl bezüglich $\mathcal{T}_{\text{Box}}$, als auch bezüglich $\mathcal{T}_X$. Finden Sie eine Folge in $(X, \mathcal{T}_X)$, deren Folgenglieder aus X^+ sind, und die in $\mathcal{T}_X$ gegen $\hat{0}$ konvergiert, aber nicht in $\mathcal{T}_{\text{Box}}$.

Übung 3.4 (2+2+1 Punkte)

Wir betrachten $S^1 \times S^1 = \{z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 = |z_2|^2 = 1\}$ mit der Unterraumtopologie in $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Aus der Vorlesung wissen wir dass dies äquivalent zu $S^1 \times S^1$ mit der Produkttopologie ist.

Es seien $0 < r < R$ reelle Zahlen, und es sei $\mathbb{T}^2$ die Rotationsfläche, die entsteht, wenn man die Kreislinie $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - R)^2 + z^2 = r^2\}$ um die z-Achse rotieren lässt.

(a) Zeigen sie, dass es einen Homöomorphismus $S^1 \times S^1 \cong \mathbb{T}^2$ gibt.

(b) Betrachten Sie für $p, q \in \mathbb{R}$ die Kurve $\gamma_{p,q}\colon \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$, $t \mapsto \big(\exp(2\pi\,\mathrm{i}\,pt), \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,qt)\big)$. Wann ist $\gamma_{p,q}$ injektiv?

(c) Skizzieren Sie das Bild der Kurve $\gamma_{2,3}$ in $\mathbb{T}^2$ für $r = 1$ und $R = 2$.

Abgabetermin ist die Vorlesung am 2.11.2019.

Die Punktzahl der Aufgaben entspricht nur sehr ungefähr ihrer Schwierigkeit. Insbesondere sind Aufgaben mit Sternchen zum Vergnügen da. Sie sind möglicherweise schwieriger als andere Fragen, aber Ihre Punktzahl wird kaum leiden, wenn Sie die Aufgabe nicht lösen.